

INTERPOLATION DE LAGRANGE AVEC GEOGEBRA

1. Rappel

Définition-théorème. Soient n points $P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$, la suite des abscisses $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant strictement croissante.

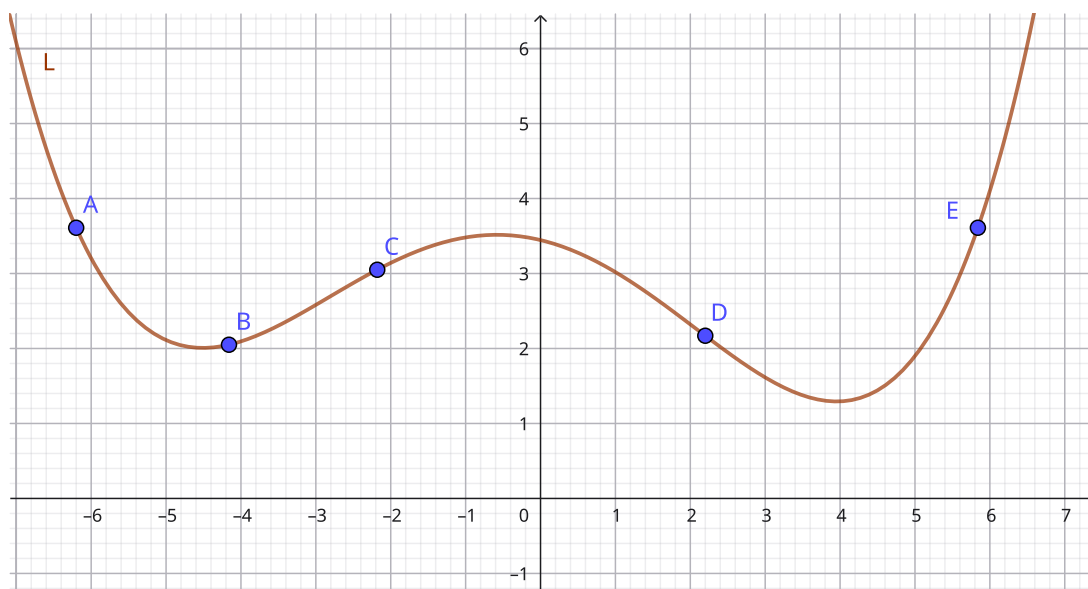
On appelle i -ème polynôme interpolateur de Lagrange le polynôme
$$l_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Alors :

1. Pour tout i , $l_i(x_i) = 1$ et $l_i(x_j) = 0$ pour tout $j \neq i$
2. Le polynôme $L(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i l_i(x)$ est l'unique polynôme de degré au plus $(n - 1)$ à passer par tous les points P_i

Remarque. On se place ici dans $\mathbb{R}^2$ pour la représentation avec GeoGebra mais le théorème se généralise dans tout corps $\mathbb{K}$ avec une indéterminée X .

2. Polynôme passant par 5 points quelconques



Protocole

- Placer sur le plan 5 points A, B, C, D et E d'abscisses distinctes.
- Définir l'ensemble : $S = \{A, B, C, D, E\}$
- Saisir $P(x) = \text{Polynôme}(S)$

La fonction Polynôme de GeoGebra renvoie le polynôme de degré au plus 4 passant par ces cinq points. Comme celui-ci est unique, il s'agit bien de l'interpolation de Lagrange, ce qui permet d'obtenir rapidement des valeurs approchées des coefficients. Cela est presque trop facile. Voyons comment retrouver cela à partir de la définition.

- Cacher ou supprimer $P(x)$.
- Saisir $n = \text{Longueur}(S)$ (donc $n \geq \deg(L) + 1$)
- Créer un curseur $i = \text{Curseur}[1, 5, 1]$
- Saisir $l = \text{Séquence}(\text{Produit}(\text{Si}(j=i, 1, ((x-x(S(j)))) / (x(S(i))-x(S(j))))), j, 1, n), i, 1, n)$ puis cacher pour ne pas surcharger le dessin.
- Saisir $L(x) = \text{Somme}(y(S(k)) * l(k), k, 1, n)$

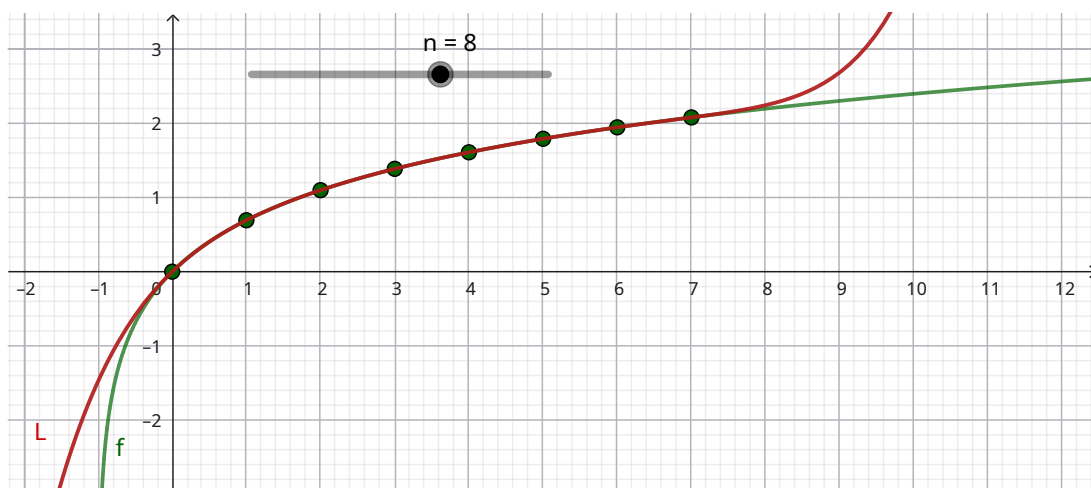
La variable l est la liste des polynômes interpolateurs. La condition « mathématique » $j \neq i$ sous le signe Π est transformée en condition « informatique » équivalente : si $j = i$, alors le facteur vaut 1.

$S(j)$ est la paire de coordonnées du j -ième point, donc $x(S(j))$ est son abscisse.

Pour visualiser les polynômes interpolateurs un par un, saisir $l(i, x)$ et bouger le curseur. On observe bien la propriété 1.1. On peut d'ailleurs rajouter la perpendiculaire $x = x(S(i))$ qui intersectera la courbe de l_i en $(x_i, 1)$

3. Interpolation de fonctions

Dans cette partie, nous interpolons la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}^+$ en n points.



- Tracer $f(x) = \ln(1+x)$
- Créer un curseur $n = \text{Curseur}[1, 12, 1]$
- Saisir $S = \text{Séquence}((k, f(k)), k, 0, n-1)$
- Puis, comme précédemment, créer un curseur $i = \text{Curseur}[1, 5, 1]$.
- Saisir $l = \text{Séquence}(\text{Produit}(\text{Si}(j=i, 1, ((x-x(S(j)))) / (x(S(i))-x(S(j))))), j, 1, n), i, 1, n)$ puis cacher pour ne pas surcharger le dessin.
- Saisir $L(x) = \text{Somme}(y(S(k)) * l(k), k, 1, n)$
- Bouger le curseur de n .