0.1.2 Exercice

Le collège Évariste Galois organise un jeu de piste pour ses 6 classes de cinquième. Lorsque les élèves font des groupes respectivement par 5, 7 et 9 élèves, le dernier groupe comporte respectivement 2, 3 et 4 élèves.

1. Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$(S_1) \quad \begin{cases} x & \equiv & 2 & [5] \\ x & \equiv & 3 & [7] \\ x & \equiv & 4 & [9] \end{cases}$$

2. En déduire le nombre d'élèves de cinquième dans l'établissement.
3. Présenter un algorithme de résolution générale. Il prend en entrée k entiers quelconques $(a_1, ..., a_k)$ et k entiers $(n_1, ..., n_k)$ deux à deux premiers entre eux. Il donne en sortie un entier x tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $x \equiv a_i \ [n_i]$.

0.1.3 Correction

1. Les entiers 5, 7 et 9 étant deux à deux premiers entre eux, le théorème des restes chinois nous assure l'existence d'un entier x vérifiant (S_1). De plus, x est unique modulo $n = 5 \times 7 \times 9 = 315$.

   Nous allons considérer l'équation :

   $(E_1) \quad 63\,u + 5\,v = 1 \quad \text{avec} \quad 63 = 7 \times 9 \quad \text{et} \quad 63 \wedge 5 = 1$

   On applique l'algorithme d'Euclide étendu (voir p. **??**) :

$$\begin{array}{rcl} 63 & = & 12 \times 5 + 3 \\ 5 & = & 1 \times 3 + 2 \\ 3 & = & 1 \times 2 + 1 \\ 2 & = & 1 \times 1 + 0 \end{array}$$

r	u	v	q
63	1	0	×
5	0	1	×
3	1	-12	12
2	-1	13	1
1	2	-25	1

$$\text{D'où :} \quad \begin{array}{rcll} 63 \times 2 + 5 \times (-25) & = & 1 & \\ 63 \times 2 & \equiv & 1 & [5] \\ 2 \times 63 \times 2 & \equiv & 2 & [5] \end{array}$$

Soit maintenant (E_2) $\quad 45\,u + 7\,v = 1$ avec $45 = 5 \times 9$

$$\begin{array}{lrcll} \text{On a :} & 45 \times (-2) + 7 \times 13 & = & 1 & \text{(par l'algorithme d'Euclide étendu)} \\ & 45 \times (-2) & \equiv & 1 & [7] \\ & 3 \times 45 \times (-2) & \equiv & 3 & [7] \end{array}$$

Et enfin : (E_3) $\quad 35\,u + 9\,v = 1$ avec $35 = 5 \times 7$

$$\begin{array}{lrcll} \text{On a :} & 35 \times (-1) + 9 \times 4 & = & 1 & \\ & 35 \times (-1) & \equiv & 1 & [9] \\ & 4 \times 35 \times (-1) & \equiv & 4 & [9] \end{array}$$

$2 \times 63 \times 2 + 3 \times 45 \times (-2) + 4 \times 35 \times (-1) = -158$

L'ensemble des x vérifiant (S_1) est donc $\{315\,k - 158,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. En supposant qu'il y a entre 25 et 30 élèves par classe, on en déduit qu'il y a 157 élèves de cinquième, en prenant $k = 1$ dans l'ensemble solution.

3. En pseudo-code : *(pour le Python, voir ci-après)*

Résolution du système

```
Entrée : Liste A de k entiers
         Liste N de k entiers 2 à 2 premiers entre eux

Poser n = produit des N_i

Pour i variant de 1 à k :
    Trouver u, v tels que (u*n/N_i) + (v*N_i) = 1
    Poser Y_i = A_i * u

Poser x = somme des (Y_i * N_i) pour i variant de 1 à k

Afficher x (modulo n)
```