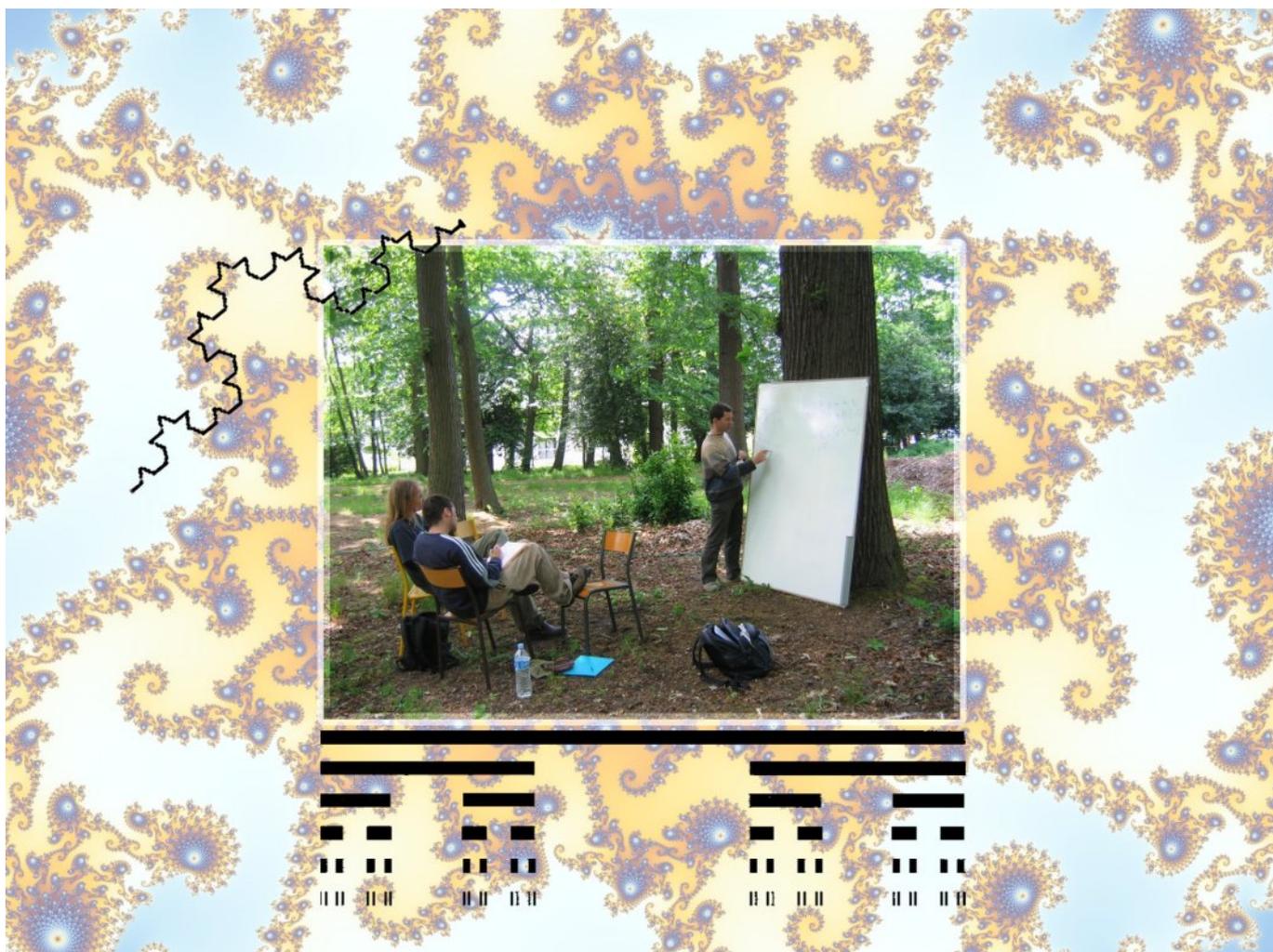


Autosimilarité, ensemble triadique de Cantor et dimension de Hausdorff



Projet de troisième année de licence de mathématiques

présenté fin mai 2007 par

Louis Iôôs et Sébastien Peronno

Professeur : Stéphane Ginouillac

Table des matières

Introduction	3
1 Mesure et dimension de Hausdorff - autosimilarité	5
1.1 Mesure et dimension de Hausdorff	5
1.1.1 Mesure de Hausdorff	5
1.1.2 Propriétés de la mesure de Hausdorff	7
1.1.3 La dimension de Hausdorff	8
1.2 Autosimilarité	12
1.2.1 Définition de l'autosimilarité	12
1.2.2 Propriété de l'autosimilarité	15
1.2.3 Dimension d'un ensemble autosimilaire	15
2 Étude d'une fractale : l'ensemble triadique de Cantor	17
2.1 Les ensembles de Cantor	17
2.1.1 Définition	17
2.1.2 Propriétés générales des ensembles de Cantor	19
2.2 Approche topologique de l'ensemble triadique de Cantor K_3	23
2.2.1 Définition de K_3	23
2.2.2 μ -Mesure de K_3	24
2.2.3 Dimension de K_3	24
2.3 Approche numérique de K_3	30
2.3.1 Développements triadiques, définition de K_3 avec ces développements	30
2.3.2 Bijection avec $[0,1]$	33
2.3.3 Autosimilarité et autres propriétés	34
3 Pour aller plus loin...	38
3.1 Le « Cantor abstrait » \mathcal{K}	38
3.1.1 Définition de \mathcal{K}	38
3.1.2 \mathcal{K} et K_3 sont homéomorphes	39
3.2 Fonction singulière de Lebesgue	42
3.2.1 Définition de la fonction	42
3.2.2 Propriétés de cette fonction	43
Remerciements	46
Bibliographie	47

Introduction

« On ne construit plus d'exemples pour illustrer les théorèmes et les théories mais pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères »

Henri Poincaré

Traditionnellement, nous définissons la « dimension » d'un objet mathématique comme le nombre de paramètres nécessaires pour décrire ses éléments. Une droite est de dimension 1 car il suffit d'un nombre (l'abscisse) pour y placer un point, un plan de dimension 2 car il faut une abscisse et une ordonnée, l'espace courant de dimension 3 etc.

Dès lors, parler de « dimension non entière », c'est aller contre cette intuition naturelle, c'est finalement être "coupable d'hérésie". À l'image de la remise en cause du dernier postulat d'Euclide, c'est aussi s'attaquer à un fondement.

Comment mettre en place un outil mathématique donnant des dimensions non entières ? Quels sont ces « monstres mathématiques » qui ne sont ni de dimension 1, ni de dimension 2 mais étrangement de dimension $\frac{\ln 2}{\ln 3}$?

Notre projet se divisera de manière triadique. Dans un premier temps, nous mettrons en place cet outil : la dimension et la mesure de Hausdorff. Puis nous étudierons une fractale basique : « l'ensemble triadique de Cantor ». Enfin, nous présenterons quelques travaux annexes résultants de cette étude.

Chapitre 1

Mesure et dimension de Hausdorff - autosimilarité

« *I'll take your brain to another dimension.* »
The Prodigy, out of space

Dans tout le projet, on se donne E un espace affine euclidien de dimension n . Dans ce chapitre, on considère une partie F de E fixée.

Sauf mention contraire, $B(x, \varepsilon)$ (avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$) désignera une boule ouverte centrée en x et de diamètre réel ε .

1.1 Mesure et dimension de Hausdorff

1.1.1 Mesure de Hausdorff

Définition 1 : Soit $U \subset E$. On appelle diamètre de U que l'on note $|U|$ ou $\text{diam}(U)$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$|U| = \sup_{(x,y) \in U^2} |x - y|$$

Définition 2 : Soit $\rho = \{U_i\}_{i \in I}$, un ensemble de parties de E (I , ensemble d'indices). On dit que ρ est un recouvrement de F si et seulement si on a $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

► Si $\text{Card}(I) < +\infty$, ce recouvrement est dit fini. **Dans ce projet, les recouvrements auront systématiquement des éléments dont le diamètre n'est pas nul** (nous verrons pourquoi après).

Définition 3 : Soit $\varepsilon > 0$. ρ est un ε -recouvrement de F si et seulement si c'est un recouvrement de F et que l'on a pour tout i de I , $|U_i| \leq \varepsilon$.

► On note $\text{Rec}_\varepsilon(F)$ l'ensemble des ε -recouvrement de F .

Propriété 4 : Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Alors, tout ε_1 -recouvrement est un ε_2 -recouvrement et on a $\text{Rec}_{\varepsilon_1}(F) \subsetneq \text{Rec}_{\varepsilon_2}(F)$.

Preuve : Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. On pose $\rho = \{B(x, \varepsilon_2/2), x \in F\}$. Alors $\rho \in \text{Rec}_{\varepsilon_2}(F)$ mais $\rho \notin \text{Rec}_{\varepsilon_1}(F)$.

Définition 5 : Soit $(\varepsilon, s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ et soit F non vide. On pose :

$$\mathcal{H}_{s,\varepsilon}(F) = \inf_{\rho \in \text{Rec}_\varepsilon(F)} \left(\sum_{i \in I} |U_i|^s \right)$$

► $\mathcal{H}_{s,\varepsilon}(F)$ appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$ et existe toujours.

☀ Cette définition signifie que l'on considère l'ensemble des ε -recouvrements et la somme de leurs diamètres élevés à la puissance s . La valeur de $\mathcal{H}_{s,\varepsilon}(F)$ est l'inf. de ces sommes.

► Nous considérons uniquement des recouvrements dont les éléments ont un diamètre non nul, sinon l'inf. serait toujours nul pour $s > 0$. En effet, $\rho = \{x, x \in F\}$ est un recouvrement ouvert constitué uniquement de points et donne donc une mesure de Hausdorff nulle pour $s > 0$.

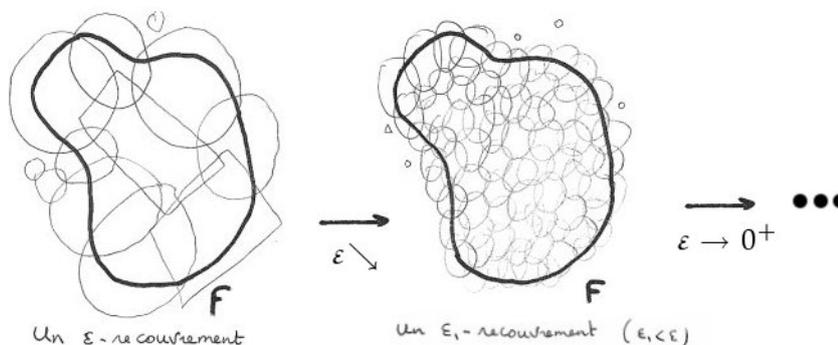
Remarque 6 Soit ρ un recouvrement. On notera $\|\rho\|_s = \sum_i |U_i|^s$.

Propriété 7 : La fonction de \mathbb{R}_+^* dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ qui à ε associe $\mathcal{H}_{s,\varepsilon}(F)$ est décroissante (conséquence de la propriété 4 p. 6).

► **Conséquence :** Cette fonction a donc une limite en 0.

Définition 8 Soit $s \in \mathbb{R}_+$. On appelle mesure de Hausdorff de F en dimension s l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\mathcal{H}_s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{s,\varepsilon}(F)$$



Définition 9 Si pour un s , $\mathcal{H}_s(F)$ est finie non nulle, F est appelé un s -ensemble.

1.1.2 Propriétés de la mesure de Hausdorff

Propriétés 10 :

(i) $\forall s > 0, \mathcal{H}_s(\emptyset) = 0$

(ii) $F \subsetneq E \implies \mathcal{H}_s(F) \leq \mathcal{H}_s(E)$

Preuve : (du (ii))

Soit $F \subsetneq E$. Donc $\text{Rec}(E) \subset \text{Rec}(F)$, d'où $\mathcal{H}_s(F) \leq \mathcal{H}_s(E)$. ■

Proposition 11 : (admise) Soient F_1 et F_2 deux ensembles disjoints.

Alors $\mathcal{H}_s(F_1 \sqcup F_2) = \mathcal{H}_s(F_1) + \mathcal{H}_s(F_2)$.

Propriété 12 Soient $s > 0, \lambda > 0$. Soit h une homothétie de rapport λ . On a $\mathcal{H}_s(h(F)) = \lambda^s \mathcal{H}_s(F)$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0, \rho = \{U_i\}_i \in \text{Rec}_\varepsilon(F)$. Alors $\rho' = \{h(U_i)\}_i \in \text{Rec}_{\lambda\varepsilon}(F)$. On note $F' = h(F)$.

On a : $\mathcal{H}_{s,\lambda\varepsilon}(F) = \inf_{\rho'} (\sum |\lambda U_i|^s) \leq \lambda^s \inf_\rho (\sum |U_i|^s) = \lambda^s \mathcal{H}_{s,\varepsilon}(F)$.

Par passage à la limite, $\mathcal{H}_s(F') \leq \lambda^s \mathcal{H}_s(F)$

On montre l'inégalité opposée en procédant au même calcul avec $h^{-1}(F')$.

On en déduit : $\mathcal{H}_s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}_s(F)$. ■

Propriétés 13 Soit $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $s_1 < s_2$. Alors :

(i) $0 \leq \mathcal{H}_{s_1}(F) < +\infty \implies \mathcal{H}_{s_2}(F) = 0$

(ii) $0 < \mathcal{H}_{s_2}(F) \leq +\infty \implies \mathcal{H}_{s_1}(F) = +\infty$.

☀ Cela veut dire que si la mesure de F en une certaine dimension est finie (nulle comprise), la mesure de F en une dimension supérieure est forcément nulle. Et si elle est non nulle (finie ou ∞), elle est infinie en dimension inférieure.

Preuve :

(i) Soient $\varepsilon > 0$ et $0 \leq s_1 < s_2$ et U un élément d'un $\rho \in \text{Rec}_\varepsilon(F)$.

$$|U| \leq \varepsilon \text{ et donc } |U|^{s_2} = |U|^{s_2-s_1} \times |U|^{s_1} \leq \varepsilon^{s_2-s_1} \times |U|^{s_1}.$$

$$\text{D'où } \inf_{\rho \in \text{Rec}_\varepsilon(F)} \left(\sum_{i \in I} |U_i|^{s_2} \right) \leq \inf \left(\sum \varepsilon^{s_2-s_1} |U_i|^{s_1} \right) \leq \varepsilon^{s_2-s_1} \times \sum |U_i|^{s_1}$$

ie. $\mathcal{H}_{s_2, \varepsilon}(F) \leq \varepsilon^{s_2-s_1} \mathcal{H}_{s_1, \varepsilon}(F)$.

Comme $s_2 - s_1 > 0$, $\varepsilon^{s_2-s_1}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Et comme $\mathcal{H}_{s_1}(F)$ est finie, par passage à la limite, $\mathcal{H}_{s_2}(F) \leq 0$ soit $\mathcal{H}_{s_1}(F) = 0$ (car elle est positive).

(ii) C'est la contraposée de (i) ■

1.1.3 La dimension de Hausdorff

Théorème 14 Soit F une partie non vide de E . Alors $\exists! s \in [0, n]$ tel que :

$$\forall s_1 < s, \mathcal{H}_{s_1}(F) = +\infty \text{ et } \forall s_2 > s, \mathcal{H}_{s_2}(F) = 0$$

Définition 15 Ce s est appelé dimension de Hausdorff de F et on note $\dim(F) = s$.

Preuve : (existence et unicité) non formelle

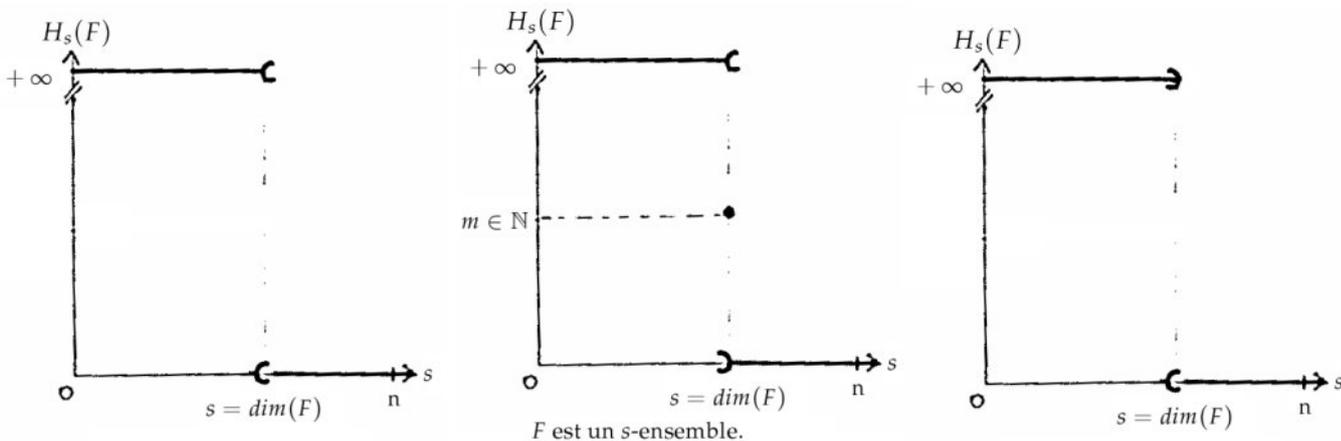
Idée : Soit F non vide. C'est au moins (au sens de l'inclusion) un point.

Or, en dimension 0, le point est de mesure 1 (il suffit de considérer un recouvrement $B(m, \alpha)$, avec m , coordonnée du point et α suffisamment petit). Donc $\dim(F) \geq 0$.

Et comme $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(F) \leq n$.

L'unicité, quant à elle, découle de la propriété précédente.

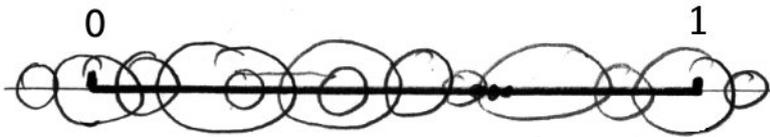
Remarque 16 : Le théorème p. 8 ne nous donne en revanche aucun renseignement sur la valeur de $\mathcal{H}_s(F)$ pour le s en question. Celle-ci peut être nulle, finie non nulle ou infinie. Il y a 3 cas possibles :



☀ Éclaircissement

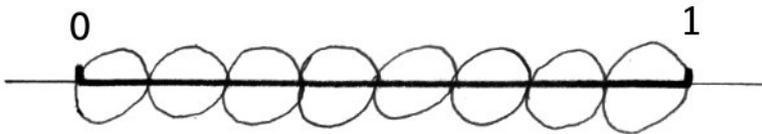
Définir la dimension comme on vient de le faire peut paraître très obscur. Voyons avec deux cas simples, un segment et un carré, en quoi la dimension de Hausdorff est compatible avec la dimension dite « euclidienne ». **De manière provisoire, nous prendrons volontairement des libertés avec la rigueur, le formalisme et les démonstrations** afin d'éclaircir les notions que l'on vient d'aborder.

► Premier cas : $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, la droite réelle



On peut le recouvrir de nombreuses manières.

Un recouvrement possible est celui où l'on prend n boules fermées de diamètre $1/n$.



(les boules fermées sur \mathbb{R} sont bien sûr les segments).

$$\text{Soit } s > 0, \quad \sum_{i=1}^n |U_i|^s = \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{n} \right|^s = \frac{n}{n^s}.$$

Si maintenant, on veut des diamètres « deux fois plus petits », $\frac{1}{2n}$, il nous faut deux fois plus de boules pour recouvrir la même surface.

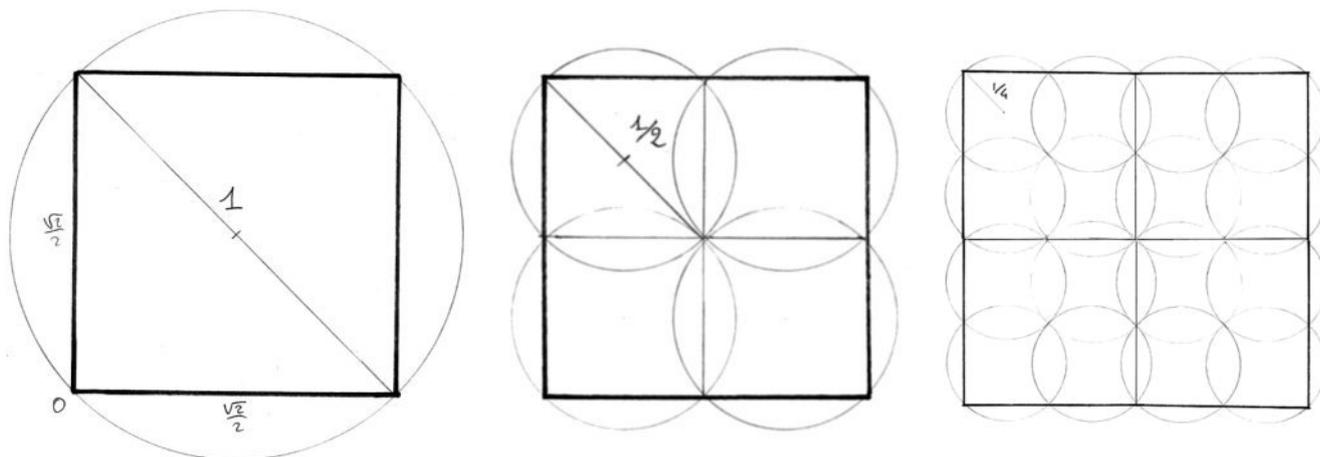
$$\sum_{i=1}^{2n} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{2n} \left| \frac{1}{2n} \right|^s = \frac{2n}{(2n)^s}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$. Pour $s = 1$, les sommes ci-dessus valent toujours 1 mais elles tendent vers $+\infty$ si $s < 1$ et vers 0 si $s > 1$. Ce qui nous donne une dimension de 1 conformément à la définition p. 8.

► Deuxième cas : $\mathcal{C} = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \subset \mathbb{R}^2$

On peut le recouvrir par :

- 1 boule de diamètre 1
- 4 boules de diamètre 1/2
- 16 boules de diamètre 1/4
- $(2^2)^n$ boules de diamètre $1/2^n$



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :
$$\sum_{i=1}^{2^{2n}} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{2^{2n}} \left| \frac{1}{2^n} \right|^s = \frac{2^{2n}}{(2^n)^s}.$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, cette somme tend vers 1 si $s = 2$, vers $+\infty$ si $s < 2$, vers 0 si $s > 2$. On trouve une dimension 2 qui conforte une nouvelle fois le principe énoncé au théorème p. 8.

Remarque : On a en fait prouvé uniquement $\dim(\mathcal{C}) \leq 2$. Ce recouvrement n'est d'ailleurs pas optimal (pour information, le recouvrement optimal est celui par des disques apolloïens, voir Sapoval).

► L'intérêt de regarder deux cas simples de manière non formelle est de faire comprendre le rôle (primordial) de l'exposant s . Cela devrait, espérons-le éclaircir le lecteur ou la lectrice sur le pourquoi et le comment de la mesure et de la dimension de Hausdorff.

1.2 Autosimilarité

1.2.1 Définition de l'autosimilarité

Définition 17 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une application $S : E \rightarrow E$ est une similitude de rapport λ si c'est la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie.

Remarque 18 : Les similitudes forment un groupe (admis).

Remarque 19 : Soit $(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\lambda\lambda' \neq 1$. La composée d'une similitude de rapport λ et d'une similitude de rapport λ' est une similitude de rapport λ .

Définition 20 : Une partie F de E est dite similaire à une partie F' de E si et seulement si il existe une similitude S telle que $S(F) = F'$.

Définition 21 Soit F une partie bornée de E Soit $(\lambda, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$. F est dite autosimilaire de type (λ, k) si et seulement si il existe k similitudes S_1, \dots, S_k toutes de rapport $1/\lambda$ et telles que $F = \bigsqcup_{i=1}^k S_i(F)$ (\bigsqcup représentant l'union d'ensembles disjoints).

Définition 22 : Si F est autosimilaire de type $(\lambda, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$ avec $(\lambda, k) \neq (1, 1)$, alors F est une fractale.

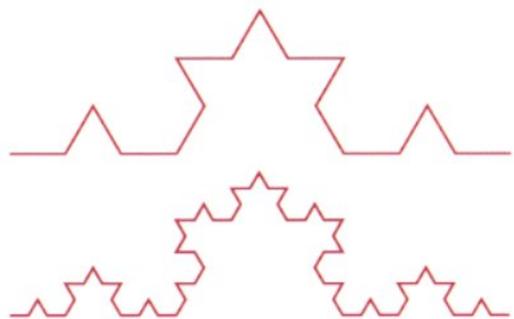
☀ Quelques exemples

La courbe de Koch et ses généralisations

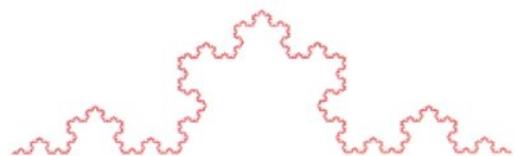
On part dans le plan du segment $[0, 1]$ de l'axe des x que l'on remplace par 4 segments de longueur $1/3$ ainsi placés :



Et on réitère le procédé pour chacun des 4 segments.

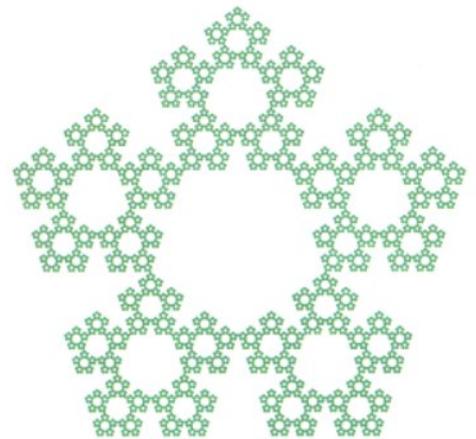


On considère donc les images itérées de $[0, 1]$ par la famille formée des deux homothéties utilisées dans l'ensemble de Cantor et de deux similitudes directes de rapport $1/3$ et d'angles $\pi/3$ et $-\pi/3$. La courbe de Koch est l'attracteur de cette famille.

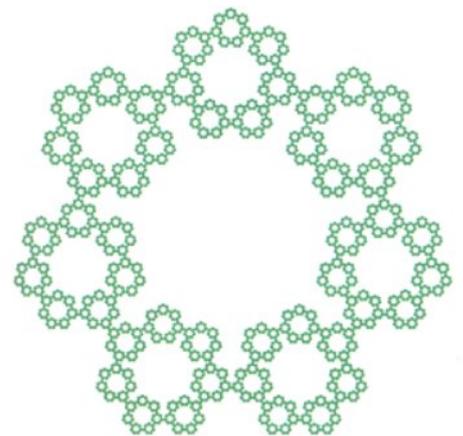


La courbe de Koch

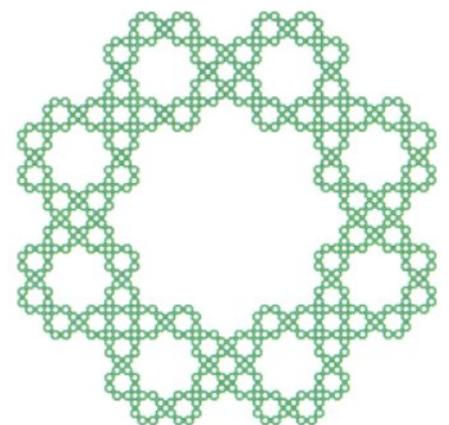
Cette courbe, dont la base est l'ensemble de Cantor, a été décrite par Von Koch en 1904 comme exemple de « courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire ».



Pentagone de Koch



Heptagone de Koch



Octogone de Koch

Tangente - Les Fractales (p. 69)

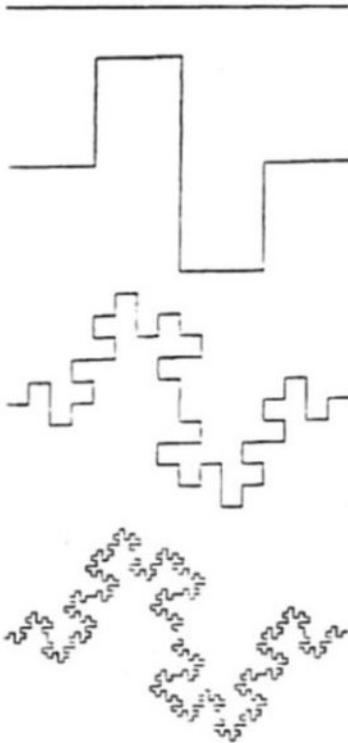
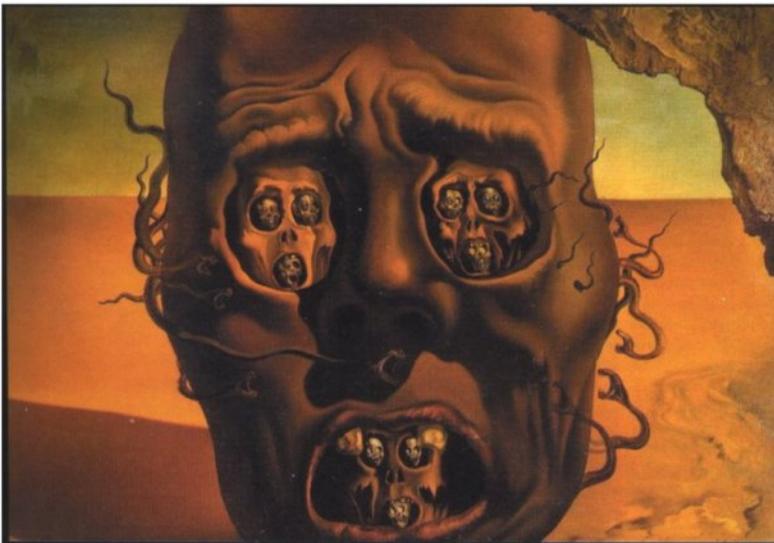


Fig 14. *Obtention d'une courbe de von Koch quadratique* On a représenté les premières opérations permettant d'obtenir la courbe de von Koch. On part d'un segment (en haut) que l'on remplace par la ligne brisée montrée en dessous, qui est constituée de segments de longueur 1/4. Puis on répète cette opération sur chacun de ces segments : on obtient la figure suivante, dont chaque segment est de longueur 1/16. Au stade suivant, la longueur élémentaire est 1/64. La figure du bas représente approximativement la courbe de von Koch obtenue après une infinité d'itérations.

Von Koch quadratique

Universalités et Fractales (p. 69) -
B. Sapoval



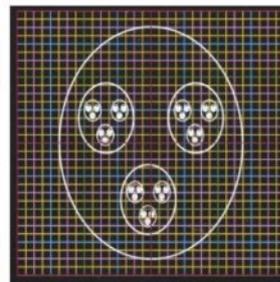
Le visage de la guerre, 1940, Museum Boymans-van Beuningen, Rotterdam.

Dimension du *Visage de la guerre*

Pour calculer la dimension fractale d'un compact K du plan, on peut recouvrir le plan d'une grille formée de carrés de côté de longueur $1/2^n$ et compter le nombre $N_n(K)$ de carrés coupant K .
Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N_n(K))}{\ln(2^n)}$$

existe, alors sa valeur d est la dimension fractale de K .
Si, en première approximation, on assimile grossièrement l'œuvre de Dalí en un emboîtement d'ellipses comme représenté sur la figure ci-contre, on trouve une dimension fractale voisine de 0,705. La mort illustrée par Dalí appartient donc à la famille des poussières de Cantor.



Tangente - les Fractales (p. 57)

1.2.2 Propriété de l'autosimilarité

Proposition 23 : Soit $(\lambda, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$. Si F est autosimilaire de type (λ, k) alors elle est aussi de type (λ^n, k^n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Soit F un ensemble autosimilaire de type (λ, k) .

On peut écrire $F = \bigsqcup_{i=1}^k S_i(F)$ où S_i est une similitude.

On peut de nouveau exprimer le F entre parenthèses comme une réunion disjointe et on a :

$$F = \bigsqcup_{i=1}^k S_i\left(\bigsqcup_{i'=1}^k S_{i'}(F)\right) = \bigsqcup_{i=1}^k \bigsqcup_{i'=1}^k S_i \circ S_{i'}(F).$$

$S_i \circ S_{i'}$ est la composée de 2 similitudes de rapport $1/\lambda$. C'est donc une similitude de rapport $1/\lambda^2$. L'ensemble F s'exprime maintenant comme la réunion disjointe de k^2 parties disjointes auxquelles elle est similaire. Elle est donc un ensemble autosimilaire de type (λ^2, k^2) .

Par récurrence sur le nombre de réunions disjointes, on peut écrire $F = \bigsqcup_{i_1, \dots, i_n \in \llbracket 1, k \rrbracket^n} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(F)$.

À chaque application $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}$ est une similitude de rapport $1/\lambda^n$ et cette réunion comporte k^n parties disjointes.

D'où F est un ensemble autosimilaire de type (λ^n, k^n) . ■

1.2.3 Dimension d'un ensemble autosimilaire

Théorème 24 Soit $(\lambda, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$. Soit F un ensemble autosimilaire de type (λ, k) . Si pour un certain s , $0 < \mathcal{H}_s(F) < +\infty$ alors $s = \frac{\ln k}{\ln \lambda}$.

Preuve : Soit F un ensemble autosimilaire de type (λ, k) .

Supposons que pour un certain s , $0 < \mathcal{H}_s(F) < +\infty$.

$$\mathcal{H}_s(F) = \mathcal{H}_s\left(\bigsqcup_{i=1}^k S_i(F)\right) = \sum_{i=1}^k \mathcal{H}_s(S_i(F)) = \frac{k}{\lambda^s} \mathcal{H}_s(F) \text{ comme les similitudes ont même rapport } \frac{1}{\lambda}.$$

Or, cette égalité est vrai si et seulement si $\frac{k}{\lambda^s} = 1$, ie. $s = \frac{\ln k}{\ln \lambda}$. ■

Théorème 25 Soit F un ensemble autosimilaire de type (λ, k) . Alors $\dim(F) \leq \frac{\ln k}{\ln \lambda}$.

Preuve :

Soit F un ensemble autosimilaire de type (λ, k) . Soit $s = \frac{\ln k}{\ln \lambda}$. Soit B une boule fixée vérifiant $F \subset B$ et soit δ son diamètre (il en existe toujours car F est bornée).

$$\text{On a : } F = \bigsqcup_{i=1}^k S_i(F) \subset \bigcup_{i=1}^k S_i(B)$$

Alors $\{S_i(B)\}_i$ est un $\frac{\delta}{\lambda}$ -recouvrement de F par k boules de même diamètre $\frac{\delta}{\lambda}$.

Par récurrence sur n (le nombre de réunions), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F = \bigsqcup_{i_1, \dots, i_n \in \llbracket 1, k \rrbracket^n} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(F) \subset \bigcup_{i_1, \dots, i_n} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(B)$$

Soit $\{B_j\}_{j \in \llbracket 1, k^n \rrbracket} = \{S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(B)\}_{i_1, \dots, i_n \in \llbracket 1, k \rrbracket^n}$. $\{B_j\}_j$ est un recouvrement de F par k^n boules de diamètre $\frac{\delta}{\lambda^n}$.

Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $n = E\left(\frac{\ln(\delta/\varepsilon)}{\ln \lambda}\right) + 1$ (où E désigne la partie entière), on a $n \in \mathbb{N}$ et $|B_j| \leq \varepsilon$.

$$\mathcal{H}_{s, \varepsilon}(F) = \inf_{\rho} \|\rho\|_s \leq \sum_{j=1}^{k^n} |B_j|^s = k^n \left(\frac{\delta}{\lambda^n}\right)^s = \underbrace{\left(\frac{k}{\lambda^s}\right)^n}_{=1} \delta^s = \delta^s.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit $\mathcal{H}_s(F) \leq \delta^s < +\infty$

Et donc $\dim(F) \leq s = \frac{\ln k}{\ln \lambda}$. ■

Remarque 26 : En réalité, nous avons aussi l'inégalité dans l'autre sens : $\dim(F) \geq \frac{\ln k}{\ln \lambda}$ (et d'où $\dim(F) = \frac{\ln k}{\ln \lambda}$). Nous ne ferons pas la preuve de cette inégalité dans le projet pour le cas général mais simplement pour le cas particulier de l'ensemble triadique de Cantor dans le chapitre II.

Chapitre 2

Étude d'une fractale : l'ensemble triadique de Cantor

2.1 Les ensembles de Cantor

2.1.1 Définition

Définition 27

Soit $I = [0, 1]$

Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels dans $]0, 1[$.

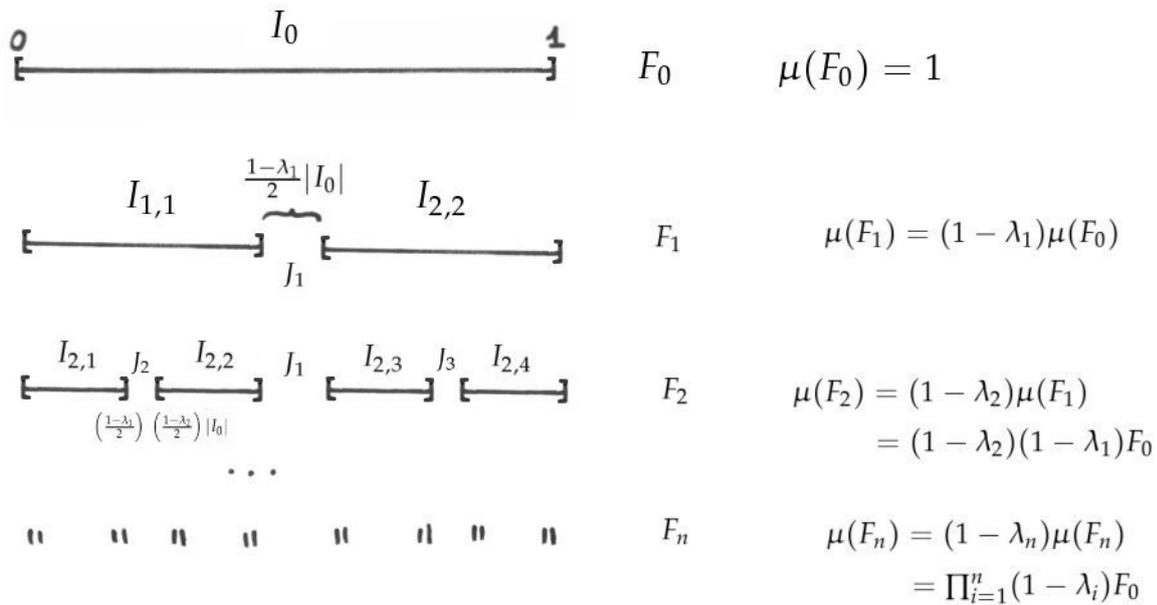
On définit par récurrence une suite de parties F_n de $[0, 1]$:

$$F_0 = I$$

F_n est une réunion finie et disjointes d'intervalles fermés $I_{n,k}$ de même longueur. On obtient F_{n+1} en "enlevant" à chaque $I_{n,k}$ l'intervalle ouvert de longueur $\lambda_n \times |I_{n,k}|$ centré dans $I_{n,k}$. Si on appelle $J_{k'}$ cet intervalle, on a donc $I_{n,k} \setminus J_{k'} = I_{n+1,2k-1} \sqcup I_{n+1,2k}$.

On note $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

K est appelé l'ensemble de Cantor associé à la suite λ .



(sur le schéma μ est la mesure de Lebesgue).

L'ensemble F_n est la réunion de k^n intervalles disjoints.

Remarque 28 Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$.

► Notations

Notation 1

À l'« étape N », on note $I_{N,k}$ ($k \in \llbracket 1, 2^N \rrbracket$) le $k^{\text{ième}}$ intervalle (en comptant de gauche à droite) de F_N . On pourra noter I_N un intervalle quelconque de F_N si la position de cet intervalle n'importe pas.

Notation 2

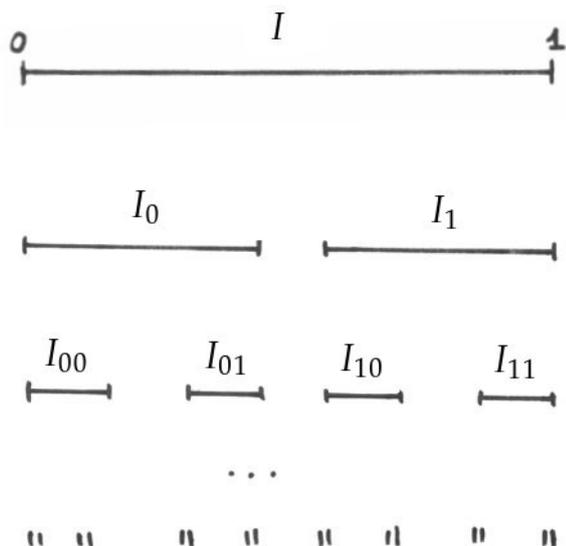
On note $I_{(0)}$ et $I_{(1)}$ les intervalles respectivement à gauche et à droite de F_1 .

Dans F_N , on définit une suite $\omega = (\omega_i)_{i \leq N}$ d'éléments de $\{0, 1\}$.

On note $I_{[\omega_N]0}$ et $I_{[\omega_N]1}$, les intervalles (appartenant à F_{N+1}) respectivement à gauche et à droite inclus dans $I_{(\omega_1 \dots \omega_n)}$.

Plus simplement, on note $I_{[\omega_N]} = I_{(\omega_1 \dots \omega_N)}$, $I_{[\omega_N]0} = I_{(\omega_1 \dots \omega_N 0)}$, etc.

Les extrémités de $I_{[\omega_N]}$ sont notés $a_{[\omega_N]}$ et $b_{[\omega_N]}$.



Remarque 29 $|I_0| = 1$; $|I_1| < \frac{1}{2}|I_0| = 1/2$; $|I_2| < \frac{1}{2}|I_1| < (\frac{1}{2})^2$.

Et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n| < (\frac{1}{2})^n$.

2.1.2 Propriétés générales des ensembles de Cantor

Définition 30 On appelle « points fondamentaux gauches (respectivement droits) de K », les extrémités gauches (respectivement droites) des intervalles de la “construction” de K .

► Par construction, un point de K ne peut pas être gauche et droit.

Proposition 31 : Les points fondamentaux de K sont dans K .

On utilise la notation 2.

Soit x un point gauche fondamental de K . On montre par récurrence que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

$x \in F_0$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{N+1} \subset F_N$ (voir remarque p. 18), il suffit de montrer : $x \in F_n \Rightarrow x \in F_{N+1}$.

Soit N tel qu’il existe $I_{[\omega_N]}$ un intervalle dont x est une extrémité. On a donc $x \in F_N$.

À l’« étape $N + 1$ », x est l’extrémité gauche de $I_{[\omega_N]0}$. Donc $x \in F_{N+1}$. \square

On démontre d'une façon similaire que l'extrémité droite d'un intervalle $I_{[\omega_N]}$ est l'extrémité de l'intervalle $I_{[\omega_N]1}$. ■

Définition 32 : Un ensemble F est dit compact si et seulement si de tout recouvrement de F par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement par des ouverts fini.

Proposition 33 : (admise) Sur \mathbb{R} , les compacts sont les fermés bornés.

Proposition 34 : K est un compact.

Preuve : : Le complémentaire de K est une réunion dénombrable d'ouverts, c'est donc un ouvert. D'où K est un fermé. Il est de plus borné par $[0,1]$, c'est donc un compact. ■

Remarque 35 : Les fermés étant boréliens, K est aussi un ensemble borélien.

Définition 36 : Soit a un point d'un ensemble F . a est dit à l'intérieur de F si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(a, \varepsilon) \subset F$. L'ensemble des points intérieurs de F est noté $\overset{\circ}{F}$.

Définition 37 : F est dit dense dans E si et seulement si $\bar{F} = E$ où \bar{F} est l'adhérence de F .

Proposition 38 K n'a aucun point intérieur.

Corollaire 39 : Le complémentaire de K dans $[0,1]$ noté $\complement_{[0,1]}(K)$ est dense dans $[0,1]$.

Preuve : Il suffit de montrer qu'aucune boule ouverte non vide ne peut être dans K .

Soient $\varepsilon > 0$, $x_0 \in K$ et $B = B(x_0, \varepsilon/2)$ la boule ouverte centrée en x_0 de diamètre ε .

On a $|I_0| = 1$ et par construction, à toute étape n de la construction de K , $|I_n| < \frac{1}{2}|I_{n-1}|$.

D'où, par récurrence, à chaque étape n , $|I_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Pour que B soit incluse dans K , il faut qu'elle soit incluse dans chacun des F_n .

Or si $\varepsilon \geq 1$, B n'est déjà pas incluse dans F_2 car il y a une discontinuité en $1/2$.

Si $\varepsilon < 1$, on prend $N = \underbrace{E \left(\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right)}_{>0} + 1$ (où E est la partie entière) et on a $N \in \mathbb{N}$ et

$|I_N| < |B|$, ce qui implique de B n'est pas incluse dans F_N . □

On a alors $\overset{\circ}{F} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}_{[0,1]}(\overset{\circ}{K}) = [0, 1] \Rightarrow \overline{\mathcal{C}_{[0,1]}(K)} = [0, 1]$.

D'où $\mathcal{C}_{[0,1]}(K)$ dense dans $[0,1]$. ■

Définition 40 : Un ensemble F est dit parfait si et seulement si il n'a pas de points isolés, c'est-à-dire : soient $x \in F$, $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in F$ avec $x \neq x_0$ tel que $x_0 \in B(x, \varepsilon/2)$.

► Exemple simple : l'intervalle $]0,1[$ est parfait.

Proposition 41 : K est parfait.

Preuve : Soit $x \in K$, $\varepsilon > 0$ et $B = B(x, \varepsilon/2)$ est la boule ouverte de centre x et de diamètre ε .

Si $\varepsilon \geq 1$ alors l'une des deux extrémités de K (0 ou 1) appartient à B .

Si $\varepsilon < 1$, alors on pose $N = \underbrace{E\left(\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}\right)}_{>0} + 1$ et on a $N \in \mathbb{N}^*$ et $|I_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon$.

$x \in K \iff x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ et donc $x \in F_N$.

Donc il existe $m_0 \in \llbracket 1, 2^N \rrbracket$ tel que $x \in I_{N, m_0}$.

Si x est l'extrémité gauche de I_{N, m_0} , on prend x_0 extrémité droite de I_{N, m_0} , sinon on prend x_0 , extrémité gauche de I_{N, m_0} .

x_0 est donc un point fondamental de K et d'après la proposition p. 19, on a $x_0 \in K$.

On a alors $x \neq x_0$ et $|x - x_0| \leq |I_{N, m_0}| < \left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon$, c'est-à-dire $x_0 \in B$. ■

Proposition 42 : Pour tout $m \in [0, 1[$, on peut trouver une suite λ tel que l'ensemble de Cantor K associé à cette suite soit de μ -mesure m (μ , mesure de Lebesgue).

Preuve :

Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels dans $]0, 1[$.

D'après le schéma p. 17, on a : $\mu(K) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_n)$.

Trouvons une suite vérifiant $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_n) = m$.

Si $m = 0$, on prend la suite constante $\lambda_n = 1/2$. On a : $\mu(K) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1/2) = 0$.

Soit $m \in]0, 1[$.

Nous devons trouver une suite de λ_n vérifiant :

$$\begin{aligned}(1 - \lambda_1) (1 - \lambda_2) \dots &= m \\ \lambda'_1 \times \lambda'_2 \times \dots &= m \quad \text{où } \lambda'_n = 1 - \lambda_n \\ e^{\ln(\lambda'_1 \times \lambda'_2 \times \dots)} &= e^{\ln m} \\ -\ln \lambda'_1 - \ln \lambda'_2 - \dots &= -\ln m \quad (\text{tous les termes ici étant strictement positifs}) \\ \lambda''_1 + \lambda''_2 + \dots &= m'' \quad \text{où } \lambda''_n = -\ln \lambda'_n \text{ et } m'' = -\ln m\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose $\lambda''_n = (\frac{1}{2})^n m''$.

On a $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda''_n = m''$.

Et alors $\lambda_n = 1 - \lambda'_n = 1 - e^{\lambda''_n} = e^{(\frac{1}{2})^n \ln m} = 1 - m^{(1/2)^n}$.

La suite λ_n ainsi définie est dans $]0, 1[$ et vérifie les hypothèses demandées. ■

2.2 Approche topologique de l'ensemble triadique de Cantor K_3

2.2.1 Définition de K_3

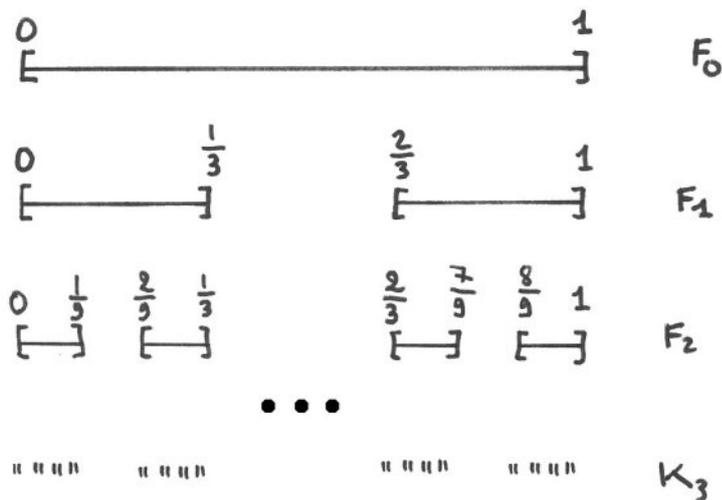
Définition 43 : On appelle ensemble triadique de Cantor, l'ensemble de Cantor associé à la suite constante $\lambda = 1/3$. On le notera K_3 .

► Construction

On peut donc construire l'ensemble triadique de Cantor de la façon suivante. À la première étape, on enlève le tiers central (ouvert) de $I = [0, 1]$, on a donc $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \sqcup [\frac{2}{3}, 1]$.

À un intervalle $I_{[\omega_N]} = [a, b]$ de F_N , on enlève le tiers central et on a alors $I_{[\omega_N]0} = [a, a + \frac{b-a}{3}]$ et $I_{[\omega_N]1} = [b - \frac{b-a}{3}, b]$. F_N est la réunion de tous ces intervalles disjoints et K_3 est l'intersection de tous les F_N .

Remarque 44 : On a : $\mu(I_{[\omega_N]0} \sqcup I_{[\omega_N]1}) = a + \frac{b-a}{3} - a + b - b + \frac{b-a}{3} = \frac{2}{3}(b-a) = \frac{2}{3}\mu(I_{[\omega_N]})$.
On en déduit alors que $\mu(F_{N+1}) = \frac{2}{3}\mu(F_N)$.



2.2.2 μ -Mesure de K_3

Proposition 45 : La μ -mesure de K_3 est nulle (où μ est la mesure de Lebesgue).

Preuve :

D'après le schéma p. 17, $\mu(K_3) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/3) = \prod_{n=1}^{\infty} (2/3) = 0$.

2.2.3 Dimension de K_3

Théorème 46 Soit $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. On a $\dim(K_3) = s$ et $\mathcal{H}_s(K_3) = 1$

Corollaire 47 : Soit $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Alors K_3 est un s -ensemble.

Preuve :

► **Avant de commencer...**

La preuve de ce théorème est la plus importante (et la plus longue) de notre projet. Nous allons résumer les points importants de cette preuve avant de rentrer dans les détails.

Dans un premier temps, nous allons trouver un ε -recouvrement dont la somme des diamètres élevés à la puissance s vaut 1. On en déduit alors que $\mathcal{H}_s(K_3) \leq 1$ et donc $\dim(K_3) \leq s$ (Proposition 1).

Pour prouver que $\mathcal{H}_s(K_3) = 1$, on va montrer l'inégalité dans l'autre sens $\mathcal{H}_s(K_3) \geq 1$: c'est la proposition 2.

Celle-ci se démontre en plusieurs étapes :

- On considère un recouvrement (de K_3) quelconque : on peut trouver un recouvrement ayant même norme $\|\cdot\|_s$ (premier lemme), $\|\cdot\|_s$ étant la somme des éléments de l'ensemble élevés à la puissance s
- On considère un recouvrement quelconque par des fermés, on peut trouver un recouvrement par des ouverts dont la norme $\|\cdot\|_s$ est "légèrement plus élevée" (deuxième lemme)
- On considère un recouvrement quelconque par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement fini par des ouverts disjoints (troisième lemme)
- On considère un recouvrement fini quelconque par des ouverts disjoints, on peut en extraire un sous-recouvrement par des fermés bornés disjoints dont la borne à gauche est

un point fondamental gauche de K_3 et la borne à droite un point fondamental droit de K_3 (quatrième lemme).

► Or ce dernier recouvrement est supérieur au égal à un recouvrement dont la somme des diamètres vaut toujours 1, donc par “remontées successives” dans les lemmes, pour tout recouvrement ρ , on a $\|\rho\|_s \geq 1$. \square

Proposition 1 : $\mathcal{H}_s(K_3) \leq 1$

Preuve :

Soit $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose : $N = \mathbb{E} \left(\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right) + 1$.

On ε -recouvre K_3 par $\rho = \{I_{N,k}, k \in \llbracket 1, 2^N \rrbracket\}$.

Il y a donc 2^N intervalles de diamètres $1/3^N$.

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^{2^N} |I_{N,k}|^s = \sum_{k=1}^{2^N} \left| \frac{1}{3^N} \right|^s = 2^N \times \left(\frac{1}{3^N} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} = \frac{2^N}{2^N} = 1.$$

Donc $\mathcal{H}_s(K_3) \leq 1$ \square

Proposition 2 : $\mathcal{H}_s(K_3) \geq 1$

Lemme 1 : Soit $\rho = \{U_i\}_i$, un recouvrement de K_3 par des parties bornées de \mathbb{R} . Il existe $\rho' = \{I_i\}_i$ où les I_i sont des intervalles fermés bornés de \mathbb{R} et tel que $\|\rho\|_s = \|\rho'\|_s$.

Preuve du lemme : Pour tout $i \in I$, on pose $I_i = [\inf U_i, \sup U_i]$. Ils existent toujours car les U_i sont bornés. Ce sont bien des intervalles fermés bornés et on a : $|I_i| = |U_i|$, donc $\|\rho\|_s = \|\rho'\|_s$. \square

Lemme 2 : Soit $\rho' = \{I_i\}_i$, I_i un recouvrement par des fermés bornés. Soient $s > 0$ et $\eta > 1$.

On peut trouver un recouvrement $R_\eta = \{O_i\}_i$ tel que pour tout i :

- O_i soient des ouverts
- $I_i \subset O_i$
- $\|\rho'\|_s = \frac{1}{\eta} \|R_\eta\|_s$

Preuve du lemme : Soit $\rho' = \{I_i\}_i$, I_i un recouvrement par des fermés bornés. Soient $s > 0$ et $\eta > 1$.

On peut noter $I_i = [c_i - r_i, c_i + r_i]$ où c_i est le centre et r_i le rayon de l'intervalle I_i .

On définit $O_i =]c_i - \eta^{1/s}r_i, c_i + \eta^{1/s}r_i[$, suite d'ouverts.

Comme $s > 0$, $\eta > 1 \Rightarrow \eta^{1/s} > 1$ et $\eta^{1/s}r_i > r_i$. On a donc $I_i \subset U_i$.

On note $R_\eta = \{O_i\}_i$. Par construction, $\bigcup_i U_i \subset \bigcup_i O_i$. Donc R_η recouvre le même ensemble que ρ' .

De plus, $\|R_\eta\|_s = \sum |O_i|^s = \sum (\eta^{1/s}|I_i|)^s = \eta \sum |I_i|^s = \eta \|\rho'\|_s$. \square

Lemme 3 : Soit $s > 0$. Soit $R = \{O_i\}_i$, recouvrement de K_3 par des intervalles ouverts. On peut trouver $R'' = \{O''_i\}_i$, un recouvrement fini de K_3 par intervalles ouverts disjoints et on a $\|R\|_s \geq \|R''\|_s$.

Preuve du lemme : Soit $s > 0$. Soit $R = \{O_i\}_i$, recouvrement de K_3 par des intervalles ouverts.

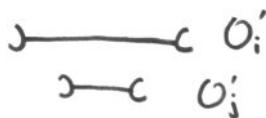
Comme K_3 est un compact, d'après Bolzano-Weirstrass, on peut en extraire un sous-recouvrement fini par des intervalles ouverts. Notons $R' = \{O'_i\}_{i \in I}$ avec $I = \{1, \dots, N\}$ un tel recouvrement. Montrons maintenant qu'on peut se ramener à des intervalles ouverts disjoints.

Scholie : Soient O'_i et O'_j deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . On peut trouver deux intervalles ouverts disjoints O''_i et O''_j tels que $(O'_i \cup O'_j) \cap K_3 = (O''_i \cup O''_j) \cap K_3$.

Preuve : Soient O'_i et O'_j deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . À un changement d'indices près (faisable car l'ordre n'importe pas), on a trois cas :

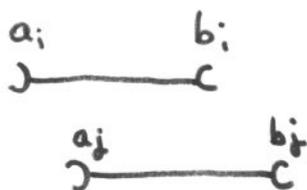
1) O'_i et O'_j sont disjoints. Dans ce cas, on pose $O''_i = O'_i$ et $O''_j = O'_j$.

2)



$O'_j \subset O'_i$. Dans ce cas, on pose $O''_i = O'_i$ et $O''_j = \emptyset$.

3)



$$a_i \leq a_j < b_i \leq b_j$$

a_i, b_i, a_j, b_j étant les extrémités respectives de O'_i et O'_j .

Dans ce cas, on prend un c vérifiant $c \in \overbrace{]a_j, b_i[}^{\neq \emptyset} \cap \mathbb{C}K_3$.

C'est toujours possible car $\mathbb{C}K_3$ est dense dans $[0,1]$.

On pose $O_i'' =]a_i, c[$ et $O_j'' =]c, b_j[$ qui sont des intervalles ouverts disjoints non vides.

Dans chacun des cas $O_i'' \subset O_i'$ et $O_j'' \subset O_j'$ d'où $|O_i''| + |O_j''| \leq |O_i'| + |O_j'|$. (fin de preuve de la scolie)

On considère maintenant R' . Grâce à la méthode décrite ci-dessus, on peut trouver un ensemble R'' d'intervalles disjoints tel que $R'' \subset R'$ soit aussi un recouvrement de K_3 . On le fait par récurrence en considérant les $\frac{N(N+1)}{2}$ paires de l'ensemble R' .

Et on a alors $R'' \subset R'$ et donc $\|R'\|_s = \|R''\|_s$.

Lemme 4 :

Suite à des contraintes temporelles, on en donne le manuscrit.

* Lemme (a) de tout $L = \{\theta_i\}$ on peut extraire un sous-rec. M par des fermés bornés disjoints dont la borne à gauche est un point fondamental gauche de K_3 et la borne à droite un point fondamental droit de K_3 .

(b) $\|M\|_5 \leq \|L\|_5$

* Preuve: Soient c_i et d_i tels que $\theta_i =]c_i, d_i[$. $c_i \notin K_3$ (resp. $d_i \notin K_3$). En effet, $c_i \in K_3 \Rightarrow \exists \theta_j \in L \mid a_j \in \theta_i$, ce qui est absurde car θ_i et θ_j sont disjoints (de même pour d_i). On considère le sous-rec. $M = \{M_i\}$ tel que $M_i = [\inf \theta_i \cap K_3, \sup \theta_i \cap K_3]$. c_i (resp. d_i) n'appartient ni à θ_i ni à K_3 , donc $\inf \theta_i \cap K_3 \in \theta_i$ et $\sup \theta_i \cap K_3 \in \theta_i$, donc $M_i \subset \theta_i$, donc $|M_i| \leq |\theta_i|$ et $\|M\|_5 \leq \|L\|_5$. $a_i \notin K_3$ donc $\exists a_i, \inf \theta_i \cap K_3 \in K_3^c$ donc $\inf \theta_i \cap K_3$ est une borne à droite d'un intervalle ouvert J de K_3^c et donc un point fondamental gauche de K_3 . De la même façon, $\sup \theta_i \cap K_3$ est un point fondamental droit de K_3 .

* autre lemme: a. de tout $M = \{M_i\}$ on peut extraire un sous-rec. P par des fermés bornés ~~de même diamètre~~ de même diamètre recouvrant exactement tous les intervalles fondamentaux de ce diamètre.

b. $\|M\|_5 \leq \|P\|_5$

* Preuve: Les bornes des intervalles de M_i sont des points fondamentaux de K_3 , on peut donc les noter $a_{(w_{N_i})}$ pour les points à gauche et $b_{(w_{N_i})}$ pour les points à droite, et on notera $M_i = [a_{(w_{N_i})}, b_{(w_{N_i})}]$.

Soit $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un point $a_{(w_{N_i})}$ (resp. $b_{(w_{N_i})}$) l'entier N_i (resp. N'_i). On note $g(a_{(w_{N_i})}) = N_i$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le maximum de cette application

On procède par récurrence de la façon suivante: on prend $M_j = \sup_{M_i \in M} \{M_i\}$, avec $|M_j| \geq |I_{(w_N)}|$. Soit I le plus gros intervalle de K_3^c inclus dans M_j et J et J' les deux

intervalles restants.

* sch : $|Q| \leq |R|$ et $|Q| \leq |R|$

* Preuve: Si $|R| \geq |Q|$, contient donc des éléments d'un complémentaire plus gros que Q , et comme $a(w_{N_i})$ est un point fondamental à droite, R contient donc tout le complémentaire et un intervalle fondamental en plus, et Q ne serait plus le plus gros $\forall J$ de M_i .

* schiste: $|M_i|^s \geq |R|^s + |R'|^s$

* Preuve: On a $|M_i| = (|R| + |Q| + |R'|)^s \geq \frac{3}{2}(|R| + |R'|)^s$ or pour $s \leq 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $k \mapsto k^s$ est concave et donc $(\frac{a+b}{2})^s \geq \frac{1}{2}a^s + \frac{1}{2}b^s$ et donc

$$|M_i|^s \geq 2\left(\frac{1}{2}|R|^s + \frac{1}{2}|R'|^s\right) = |R|^s + |R'|^s.$$

* Preuve du lemme: on obtient en remplaçant M_i par R et R' un sous recouvrement inférieur à M . En répétant l'opération sur d'autres M_i jusqu'à que il n'existe plus d'intervalles dont le diamètre soit inférieur à $|I(w_N)|$.

On a enduré le plus gros intervalle du complémentaire à trois, donc jamais le plus gros contenu dans un intervalle de diamètre $|I(w_N)|$. On obtient un sous-rec. P constitué

uniquement d'intervalles de diamètre $\frac{1}{3^N}$ recouvrant K_3 , avec $\|P\|_s \leq \|M\|_s$. Il y'en a 2^N dans K_3 , correspondant au nombre d'intervalles de F_N . On a donc

$$\|P\|_s = \sum_{k=1}^{2^N} \left|\frac{1}{3^N}\right|^s = 2^N \times \frac{1}{3^N} = 1.$$

Comme dit en introduction, ce dernier recouvrement ayant sa somme des diamètres élevés à la puissance s toujours égale à 1, par "remontées successives" dans les lemmes, pour tout recouvrement ρ , on a $\|\rho\|_s \geq 1$ \square

Ainsi, d'après les propositions 1 et 2, par double inégalité, on a donc :

$$\mathcal{H}_s(K_3) = 1$$

2.3 Approche numérique de K_3

2.3.1 Développements triadiques, définition de K_3 avec ces développements

Définition 48 : Un développement triadique d'un réel $x \in [0, 1]$ est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{0, 1, 2\}$ telle que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{3^n}$. On admettra par la suite que tout réel en possède un ou deux.

Définition 49 : On appelle développement impropre un développement dont la suite $(x_n)_n$ est égale à 2 pour tout n à partir d'un certain rang n_0 . On appelle développement propre tout autre développement.

Proposition 50 : Si $x \in [0, 1[$ possède un développement impropre alors il possède aussi un développement propre.

Preuve : Soit x un réel de $[0, 1[$ possédant un développant impropre $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Soit n_0 tel que $n_0 \neq 2$ et $\forall n > n_0, x_n = 2$.

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{3^n} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n_0}}$$

On pose $(x'_n)_n$ tel que $\forall n < n_0, x'_n = x_n, x'_{n_0} = x_{n_0} + 1, \forall n > n_0, x'_n = 0$.

$$x'_{n_0} \in \{1, 2\} \text{ et } x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x'_n}{3^n}.$$

La suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc un développement propre de x . ■

Proposition 51 : Soit $x \in [0, 1]$. Il possède zéro ou un développement dans lequel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n \neq 1$.

Preuve : Soit $x \in [0, 1]$. Si x possède deux développements, il possède un développement impropre, donc il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{3^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}.$$

Si $x_N = 0$, et que $\forall n < N, x_n \neq 1$ alors le développement impropre de x est sans 1.

Si $x_N = 1$, et que $\forall n < N, x_n \neq 1$ alors pour la suite $(x'_n)_n$ du développement propre $x'_N = x_N + 1 = 2$, et donc le développement propre de x est sans 1 (puisque $\forall n > N, x_n = 0$). ■

Théorème 52 L'ensemble triadique de Cantor est l'ensemble des réels x de $[0,1]$ tel qu'il existe un développement triadique de x sans 1.

Corollaire 53 : Si $x \in K_3$ alors il existe un seul développement $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfaisant : $(\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \{0, 2\})$.

Preuve :

Lemme 54 : Soit $I_{[\omega_N]}$ un intervalle de F_N .

Alors il est de la forme $I_{[\omega_N]} = [a_{[\omega_N]}, b_{[\omega_N]}] = \left[\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k}, \left(\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k} \right) + \frac{1}{3^N} \right]$

Preuve du lemme : Nous allons le montrer par récurrence. $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, l'hypothèse est vérifiée.

Soit $I_{[\omega_N]}$ un intervalle quelconque de F_N . On note a et b ses extrémités. Supposons que $I_{[\omega_N]} = [a, b] = \left[\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k}, \sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k} + \frac{1}{3^N} \right]$ et montrons que les intervalles de F_{N+1} sont d'une forme similaire.

$$\blacktriangleright I_{[\omega_N]0} = [a', b'] = [a, a + \frac{b-a}{3}]$$

$$a' = a$$

$$b' = a + \frac{b-a}{3} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k + \frac{2\omega_k}{3} - \frac{2\omega_k}{3}}{3^k} \right) + \frac{1}{3^{N+1}} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k} \right) + \frac{1}{3^{N+1}}$$

On pose la suite $(\omega'_k)_k$ à $N+1$ éléments telle que pour tout $n \leq N, \omega'_k = \omega_k$ et $\omega'_{N+1} = 0$.

$$\text{On a alors } I_{[\omega'_N]} = I_{[\omega_N]0} = \left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{2\omega'_k}{3^k}, \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{2\omega'_k}{3^k} \right) + \frac{1}{3^{N+1}} \right]$$

$I_{[\omega'_N]}$, intervalle de F_{N+1} vérifie l'hypothèse.

$$\blacktriangleright I_{[\omega_N]1} = [a'', b''] = [b - \frac{b-a}{3}, b]$$

$$a'' = b - \frac{b-a}{3} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k - \frac{2\omega_k}{3} + \frac{2\omega_k}{3}}{3^k} \right) + \frac{1}{3^N} - \frac{1}{3^{N+1}}$$

$$b'' = b$$

On pose la suite $(\omega''_k)_k$ à $N + 1$ éléments telle que pour tout $n \leq N$, $\omega''_k = \omega_k$ et $\omega''_{N+1} = 2$.

$$\text{On a alors } I_{[\omega''_N]} = I_{[\omega_N]1} = \left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{2\omega''_k}{3^k}, \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{2\omega''_k}{3^k} \right) + \frac{1}{3^{N+1}} \right]$$

$I_{[\omega''_N]}$, intervalle de F_{N+1} vérifie l'hypothèse.

Par récurrence, l'hypothèse du lemme est donc démontrée. \square

► Soit $K' = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{3^n}, x \in \{0, 2\} \right\}$.

On montre $K' = K_3$ par double inclusion.

\square Montrons $K' \subset K_3$.

Soit $x \in K'$. On a : $x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{3^n}$ avec $(x_n)_n$ suite d'éléments de $\{0, 2\}$.

Pour $N \geq 1$ fixé, on pose $c = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$.

On a alors : $x = \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{3^n} + c$.

Or $0 \leq c \leq \frac{1}{3^N}$.

Donc $x \in \left[\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k}, \left(\sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k} \right) + \frac{1}{3^N} \right] = I_{[\omega_N]}$ (d'après le lemme ci-dessus).

Donc $x \in F_N$. Comme c'est vrai pour tout N , $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ et donc $x \in K_3$.

\square $K_3 \subset K'$. Soit $x \in [0, 1]$. Cela revient à montrer par contraposée : $(x \notin K' \implies x \notin K_3)$.

Soit $x \in [0, 1]$ tel que $x \notin K'$.

Il admet un développement triadique : $x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{3^n}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \{0, 1, 2\}$.

Comme $x \notin K'$, il existe un n_0 tel que $x_{n_0} = 1$.

Soit $N = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n = 1)$ et $c = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$.

On a $x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{3^N} + c$ et $0 \leq c \leq \frac{1}{3^N}$.

Si $c = 0$, on a $x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{3^N} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{3^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$ et donc $x \in K_3$.

Si $c = \frac{1}{3^N}$, on a $x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{2}{3^N}$ et donc $x \in K_3$.

On a donc $0 < c < \frac{1}{3^N}$ et $x \in \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k}{3^k} + \frac{1}{3^N}, \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k}{3^k} \right) + \frac{2}{3^N} \right]$

Posons la suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \leq N-1, \omega_n = \frac{x_n}{2}$. Comme $x_n \in \{0, 2\}$, $\omega_n \in \{0, 1\}$.

On a $x \in \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\omega_k}{3^k}, \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\omega_k}{3^k} \right) + \frac{1}{3^{N-1}} \right] = I_{[\omega_N]}$ donc $x \in I_{[\omega_{N-1}]}$.

Or, $x > \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k}{3^k} + \frac{1}{3^N}$ donc $x > \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\omega_k}{3^k} + \frac{1}{3^N}$, ie. $x \notin I_{[\omega_N]}$ pour $\omega_N = 0$.

Et, $x < \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k}{3^k} + \frac{2}{3^N}$ donc $x < \sum_{k=1}^N \frac{2\omega_k}{3^k}$, ie. $x \notin I_{[\omega_N]}$ pour $\omega_N = 1$.

D'où $x \notin F_N$ et donc $x \notin K_3$. \square

D'après la proposition p. 30, pour tout $x \in K_3$, un et un seul développement satisfait à la condition $(\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \{0, 2\})$. \blacksquare

2.3.2 Bijection avec [0,1]

Théorème 55 (dit de Cantor-Bernstein) Soient F_1 et F_2 deux ensembles. S'il existe une injection de F_1 dans F_2 et une injection de F_2 dans F_1 , alors F_1 et F_2 sont en bijection.

► Ce théorème est admis.

Théorème 56 K_3 est en bijection avec [0,1].

Corollaire 57 : K_3 n'est pas dénombrable et a la puissance du continu.

Preuve : L'application « identité » de K_3 dans $[0,1]$ qui à tout x de K_3 associe le même point x dans $[0,1]$ est injective.

Exhibons une injection dans l'autre sens.

Soit f de $[0,1]$ dans K_3 qui à tout x de $[0,1]$ associe y dans K_3 . On la définit ainsi :

Tout x de $[0,1]$ peut s'écrire en développement décimal $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}$, $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ dont un seul développement est propre.

Au développement propre de x , on associe l'élément de K_3 : $y = 0, \overbrace{0 \dots 0}^{x_1 \text{ zéros}} 2 \overbrace{0 \dots 0}^{x_2 \dots} 2 \overbrace{0 \dots 0}^{x_n \dots} 2 0 \dots$

Les éléments de K_3 du type :

$$y = 0, \overbrace{0 \dots 0}^{x_1 \dots} 2 \overbrace{0 \dots 0}^{x_N} 2 \overbrace{0 \dots 0}^{9 \text{ zéros}} 2 \overbrace{0 \dots 0}^{9 \text{ zéros}} 2 \overbrace{0 \dots 0}^{9 \text{ zéros}} 2 0 \dots$$

n'ont pas d'antécédents par f ce qui assure que f est bien définie.

Les éléments de K_3 ont au plus un antécédent par f , donc f est injective.

On a donc trouvé une double-injection. Par le théorème de Cantor-Bernstein, K_3 et $[0,1]$ sont en bijection. \square

► La bijection de K_3 avec $[0,1]$ implique K_3 est en bijection avec \mathbb{R} , donc que K_3 est non dénombrable et à la puissance du continu. \blacksquare

2.3.3 Autosimilarité et autres propriétés

Proposition 58 : K_3 est un ensemble autosimilaire de type (3,2).

Preuve : Notons ici K pour K_3

$$K = K_g \sqcup K_d \quad \text{où} \quad K_g = \{x \in K_3 \cap [0, 1/3]\} = \{x, x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} \text{ et } x_1 = 0\} \quad \text{« partie gauche »}$$

$$\text{et} \quad K_d = \{x \in K_3 \cap [2/3, 1]\} = \{x, x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} \text{ et } x_1 = 1\} \quad \text{« partie droite »}$$

Soit h , l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{3}$.

$$h(K) = \{x', x' = \frac{1}{3}x, x \in K\}$$

$$\text{On a : } x' = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_{k-1}}{3^k} = \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{x'_{k'}}{3^{k'}} \quad \text{où } x'_1 = 0 \text{ et } x'_{k+1} = x_k$$

On a donc $h(K) = K_g$, ie. K et K_g similaires.

D'une façon semblable, on montre que $\mathcal{T} \circ h(K) = K_d$ où \mathcal{T} est la translation de vecteur $2/3$.

Donc K et K_d similaires aussi.

En posant $S_1 = h$ et $S_2 = \mathcal{T} \circ h$, il existe donc une écriture $K = S_1(K) \sqcup S_2(K)$ où S_1 et S_2 sont des similitudes de rapport $\frac{1}{3}$.

Donc K_3 est un ensemble autosimilaire de type (3,2). ■

Proposition 59 : $x \in K_3 \iff 1 - x \in K_3$

Preuve : On le fait par une double implication.

\Rightarrow Soit $x \in K_3$. Il existe une unique suite $(x_i)_i$ tel que $x = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{3^i}$ avec $x_i \in \{0, 2\}$.

$1 = 0,2222\dots$ en développement triadique impropre. Posons $(u_i)_i$ tel que pour tout $i \geq 1, u_i = 2$.

$$1 - x = \sum_{i \geq 1} \frac{u_i}{3^i} - \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{3^i} = \sum_{i \geq 1} \frac{u_i - x_i}{3^i}$$

$$x_i = 0 \Rightarrow u_i - x_i = 2$$

$$x_i = 2 \Rightarrow u_i - x_i = 0 \quad \text{et donc pour tout } i, u_i - x_i \in \{0, 2\}.$$

On a alors $1 - x \in K_3$.

\Leftarrow Réciproquement, soit x tel que $1 - x \in K_3$.

$$\text{Alors } 1 - (1 - x) = x \in K_3 \quad \blacksquare$$

Définition 60 : Soient F_1 et F_2 deux parties de E . On appelle somme de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2, x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$.

► Par abus d'écriture, on notera $F_1 - F_2 = \{x_1 - x_2; x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$.

Proposition 61 : $K_3 + K_3 = [0, 2]$

Corollaire 62 : $K_3 - K_3 = [-1, 1]$

Preuve : On le fait par une double injection.

$K_3 \subset [0, 1]$ donc $K_3 + K_3 \subset [0, 2]$

Pour prouver l'autre sens, on va montrer que tout élément x de $[0, 2]$ peut s'exprimer comme la somme de deux éléments u et v de K_3 .

Soit $x \in [0, 2]$.

Si $x = 2$, alors on pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_n = 2$.

$$u = v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \text{ sont bien dans } K_3 \text{ et } x = u + v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1 + 1 = 2.$$

Si $x \in [0, 2[$. On note $(x_n)_n$ la suite associée à son développement triadique propre, c'est-à-dire qu'on a :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ avec } x_n \in \{0, 1, 2\}, \text{ la suite ne finissant pas par que des 2.}$$

Au rang n , il y a deux cas possibles qu'on appelle « avec retenue » et « sans retenue ». Cette distinction provient des valeurs prises par les différentes suites au rang $n - 1$.

► Si le rang n est un cas « sans retenue » et si...

- $x_n = 0$, on pose $u_n = 0$ et $v_n = 0$ et le rang $n + 1$ est « sans retenue ».
- $x_n = 1$, on pose $u_n = 0$ et $v_n = 0$ et le rang $n + 1$ est « avec retenue ».
- $x_n = 2$, on pose $u_n = 2$ et $v_n = 0$ et le rang $n + 1$ est « sans retenue ».

► Si le rang n est un cas « avec retenue » et si...

- $x_n = 0$, on pose $u_n = 2$ et $v_n = 0$ et le rang $n + 1$ est « avec retenue ».
- $x_n = 1$, on pose $u_n = 2$ et $v_n = 2$ et le rang $n + 1$ est « sans retenue ».
- $x_n = 2$, on pose $u_n = 2$ et $v_n = 2$ et le rang $n + 1$ est « avec retenue ».

On trouve ainsi de manière successive les valeurs de u_n et v_n et cela permet d'avoir toutes les valeurs possibles pour x .

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ayant leurs valeurs dans $\{0,2\}$. Les éléments $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{3^n}$ et $v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{3^n}$ sont donc dans K_3 .

On a donc $[0,2] \subset K_3 + K_3$, d'où $K_3 + K_3 = [0,2]$ ■

► Exemple

$$x = 0,112120000... \in [0,2]$$

$$u = 0,022022222... \in K_3$$

$$v = 0,200200000... \in K_3$$

Preuve : (du corollaire)

$$K_3 - K_3 = \{x - y, x, y \in K_3\} = \{x - (1 - y), x, y \in K_3\} = \{x + y - 1, x, y \in K_3\} = [-1, 1]$$

Chapitre 3

Pour aller plus loin...

« Finalement, nous arrivons au paradis des mathématiciens : ce sont les problèmes qui, à force de réflexion, ont engendré des idées nouvelles qui, souvent, dépassent de façon incommensurable le problème qui leur a donné naissance. »

Jean Dieudonné

3.1 Le « Cantor abstrait » \mathcal{K}

3.1.1 Définition de \mathcal{K}

Définition 63 On appelle « ensemble de Cantor abstrait » ou par anacoluthie « Cantor abstrait » l'ensemble $\mathcal{K} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Définition 64 : Soit F un ensemble. On dit qu'une application d de $F \times F$ dans \mathbb{R}_+ est une distance si et seulement si pour x, y, z de E , elle vérifie :

- $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

► Exemple : $d(x, y) = |x - y|$, la distance usuelle dans \mathbb{R} .

Définition 65 : Soient $(x, y) \in \mathcal{K}^2$ tel que $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suites d'éléments dans $\{0, 1\}$

On définit une application $D : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
 $(x, y) \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - y_n|}{3^n}$

Proposition 66 : D est une distance sur \mathcal{K} .

Preuve : Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suite d'éléments dans $\{0,1\}$.

$$D(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| \geq 0$$

$$D(x, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - x_n|}{3^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{0}{3^n} = 0.$$

$$D(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|y_n - x_n|}{3^n} = D(y, x)$$

$$D(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - z_n|}{3^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - y_n + y_n - z_n|}{3^n} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|y_n - z_n|}{3^n} = D(x, y) + D(y, z)$$

D vérifie bien tous les axiomes, c'est donc une distance. ■

Définition 67 : On appelle cette distance D la distance discrètement triadique sur \mathcal{K} .

3.1.2 \mathcal{K} et K_3 sont homéomorphes

Définition 68 : Une bijection est bicontinue si et seulement si elle est continue et que sa bijection réciproque est continue.

Définition 69 : Un homéomorphisme est une bijection bicontinue.

Définition 70 : Soient F_1 et F_2 deux ensembles. On dit que F_1 et F_2 sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme de F_1 sur F_2 (et réciproquement).

Théorème 71 K_3 et \mathcal{K} sont homéomorphes.

Preuve :

$$\text{Soit l'application } \varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & K_3 \\ X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} & \longmapsto & x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2x_n}{3^n} \end{array}$$

Nous allons montrer que φ est un homéomorphisme.

Lemme 72 : L'application φ est bijective.

Preuve du lemme : φ est surjective car $K_3 = \{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2x_n}{3^n}, x \in \{0,1\}\}$.

Montrons qu'elle est injective. Soit $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $Y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suite d'éléments dans $\{0,1\}$ tels que $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

$$\text{On a alors } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2x_n}{3^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2y_n}{3^n}.$$

D'après le corollaire p. 31, cela implique que $X = Y$, et donc que φ est surjective.

φ est alors injective et surjective, elle est donc bijective. \square

Lemme 73 : L'application φ est continue.

Preuve du lemme : On munit K_3 de la distance usuelle d et \mathcal{K} de la distance discrètement triadique D .

Soient $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $Y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suites d'éléments de $\{0,1\}$, et x et y dans K_3 tels que $\varphi(X) = x$ et $\varphi(Y) = y$.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = |\varphi(X) - \varphi(Y)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2x_n}{3^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2y_n}{3^n} \right| \\ &= 2 \left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{3^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{y_n}{3^n} \right| \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} = 2 D(X, Y) \end{aligned}$$

Donc $d(x, y) \leq 2 D(X, Y)$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de \mathcal{K} tendant vers X et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite d'éléments de K_3 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(X_n) = u_n$.

Comme $d(u_n, x) \leq 2 D(X_n, X)$, on a :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X \implies D(X_n, X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \implies d(u_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \implies u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

D'où : $\left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X \implies \varphi(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi(X) \right)$, ie. φ est continue \square

Lemme 74 : L'application φ^{-1} est continue.

Preuve du lemme : Soit $k = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \{x_n \neq y_n\}$

$$d(x, y) = 2 \left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| = 2 \left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| \geq 2 \left| \frac{1}{3^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \right|$$

Donc $d(x, y) \geq \frac{1}{3^k}$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de K_3 tendant vers x .

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $u_N = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_{N,n}}{3^n}$.

Soit $k_N = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \{u_{N,n} \neq x_n\}$.

$d(u_n, x) \geq \frac{1}{3^{k_n}}$. Or, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, donc $d(u_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\frac{1}{3^{k_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite d'éléments de \mathcal{K} telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(X_n) = u_n$.

On a, pour $N \in \mathbb{N}$, $X_N = (u_{N,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Soit $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, suite d'éléments de $\{0,1\}$ tel que $\varphi(X) = x$.

$$D(X_N, X) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|u_{N,n} - x_n|}{3^n} = \sum_{n=k_N}^{\infty} \frac{|u_{N,n} - x_n|}{3^n} \leq \sum_{n=k_N}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Donc $D(X_N, X) \leq \frac{1}{3^{k_N-1}}$ et $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc $D(X_N, X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \iff \varphi(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(X)$.

On a donc : $\left(\varphi(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(X) \implies X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X \right)$, donc φ^{-1} est continue. \square

Ainsi, d'après les 3 lemmes précédents, φ est une bijection bicontinue.

C'est donc un homéomorphisme.

Donc \mathcal{K} et K_3 sont homéomorphes. \blacksquare

3.2 Fonction singulière de Lebesgue

3.2.1 Définition de la fonction

En raison de contraintes temporelles, nous n'avons pas pu recopier le manuscrit en \LaTeX .

* Définition: Soit l'application $\varphi: K_3 \rightarrow [0,1]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}^+, x_n \in \{0,1\}$. Notons $J_{(\lambda_k)}$ le plus gros intervalle ouvert du complémentaire de K_3 , noté K_3^c , inclus dans $I_{(\lambda_k)}$.
Soit a et b tels que $J_{(\lambda_k)} = [a, b]$, $J_{(\lambda_{k+1})} = [a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}]$

$$\text{or } I_{(\lambda_k)} = \left[\sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} \right], \text{ donc}$$

$$J_{(\lambda_k)} = \left] \sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}} \right[, \text{ et ce quelque soit}$$

l'intervalle fondamental $I_{(\lambda_k)}$. Le complémentaire K_3^c de K_3 est l'union de tous les intervalles ouverts $J_{(\lambda_k)}$.

Soit a' et $b' \in \mathbb{R}$ tels que $J_{(\lambda_k)} =]a', b'[$.

$$\varphi(a') = \varphi\left(\sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

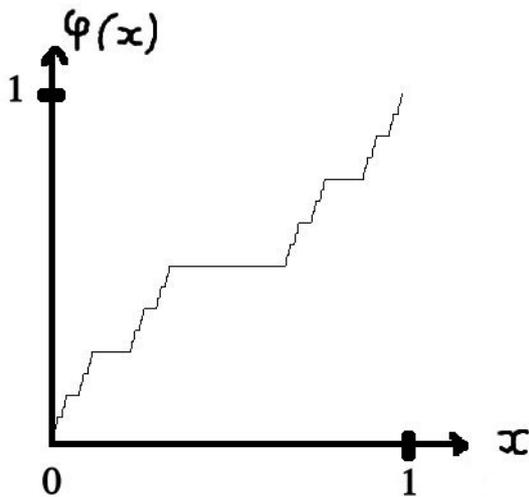
$$\varphi(a') = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\varphi(b') = \varphi\left(\sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}}\right) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k+1}} = \varphi(a')$$

Donc pour tout $J_{(\lambda_k)} =]a', b'[$, on $\varphi(a') = \varphi(b')$. On peut donc prolonger φ par continuité en une fonction constante égale à $\varphi(a')$ sur $J_{(\lambda_k)} =]a', b'[$ et ce sur tous les $J_{(\lambda_k)}$, donc sur K_3^c .

On obtient ainsi une fonction $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, appelée fonction singulière de Lebesgue.

3.2.2 Propriétés de cette fonction



* Proposition: f est surjective sur $[0, 1]$
 * Preuve: En utilisant le développement dyadique, on a $[0, 1] = \{x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}, x_n \in \{0, 1\}\}$. Donc $\forall x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}$ avec $x_n \in \{0, 1\}$ il suffit de trouver a tel que $f(a) = x$. Or pour $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}$ avec $x_n \in \{0, 1\}$, $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n}$ convient, car $f(a) = x$. f est donc surjective.

* Corollaire: On peut noter que $a \in K_3$ et donc que $\psi: K_3 \rightarrow [0, 1]$ est aussi surjective, ce qui est une preuve de l'indénombrabilité de K_3 .

* Proposition: f est croissante sur $[0, 1]$
 * Preuve: f est constante par morceaux sur $[0, 1] \setminus K_3$. Sur K_3 , soit a et $b \in K_3$, $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2a_n}{3^n}$ avec $a_n \in \{0, 1\}$ et $b = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2b_n}{3^n}$ avec $b_n \in \{0, 1\}$, et $a < b \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2a_n}{3^n} < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2b_n}{3^n} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^0$ tel que $\forall n < k, a_n = b_n$ et $a_k < b_k \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{2^n} < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{2^n} \Leftrightarrow f(a) < f(b)$. f est donc bien croissante.

* Corollaire: f est surjective et croissante sur son ensemble de définition, elle est donc continue.

* Proposition: $\forall x \in [0,1], f(x) + f(1-x) = 1$.

* Preuve: pour $x \in K_3$, soit $x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2x_n}{3^n}$ avec $x_n \in \{0,1\}$,

$$1-x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2(1-x_n)}{3^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{3^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{3^n}$$

$$f(x) + f(1-x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = 1.$$

pour $x \in [0,1] \setminus K_3$, on a $f(x) = f(a') = f(b')$ avec a' et b' bornes d'un intervalle du complémentaire $J_{(x)} =]\sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{i=1}^k \frac{2\lambda_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}}[$

a' et $b' \in K_3$, donc $1-a'$ et $1-b' \in K_3$.

$$1-a' = \sum_{i=1}^k \frac{2(1-\lambda_i)}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^k \frac{2(1-\lambda_i)}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}}$$

$$\text{et } 1-b' = \sum_{i=1}^k \frac{2(1-\lambda_i)}{3^i} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^k \frac{2(1-\lambda_i)}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}}$$

avec $(1-\lambda_n) \in \{0,1\}$ car $\lambda_n \in \{0,1\}$, $1-a'$ et $1-b'$ sont donc eux aussi bornes d'un intervalle de K_3^c , $J_{(x)} =]1-b', 1-a'[$

et $1-x \in J_{(x)}$, donc on a $f(x) + f(1-x) = f(a') + f(1-b')$

or $f(1-b') = f(1-a')$ donc $f(x) + f(1-x) = f(a') + f(1-a') = 1$
car $a' \in K_3$.

* Proposition: $\forall x \in [0,1], f(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2} f(x)$

* Preuve: pour $x \in K$, soit $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$ avec $x_n \in \{0,1\}$,

$$\frac{x}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x_n}{3^{n+1}}; f(\frac{x}{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \frac{1}{2} f(x).$$

pour $x \notin [0,1] \setminus K$, par un raisonnement similaire à celui de la preuve précédente, on a $f(x) = f(a')$ et $f(\frac{x}{3}) = f(\frac{a'}{3})$ et donc $f(\frac{x}{3}) = f(\frac{a'}{3}) = \frac{1}{2} f(a') = \frac{1}{2} f(x)$.

* Corollaire. l'intégrale de f sur $[0,1]$ est égale à $\frac{1}{2}$

* Preuve: Sur $[0,1]$, f est continue donc intégrable.

$$f(x) + f(1-x) = 1 \text{ donc } \int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx = \int_0^1 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = 1$$

$$\text{soit } u = 1-x, \text{ on a } \int_0^1 f(x) dx + \int_1^0 -f(u) du = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(u) du = 1 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ donc } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

La fonction singulière de Lebesgue coupe donc le carré $[0,1] \times [0,1]$ en deux ~~parts~~ moitiés d'aires égales

Remerciements

Nous tenons à remercier particulièrement notre professeur Stéphane Ginouillac. Ce projet a été vraiment agréable à réaliser. Les séances avec le grand tableau blanc récupéré à Humanitude, dehors au soleil ou à l'ombre dans le petit bois derrière Descartes (voir photo) resteront inoubliables.

Resteront aussi dans les mémoires, les soirées et aprèm' au local d'Humanitude ou chez Seb à rédiger des maths psychédélics sous goa-trance ou tek-hardcore. On pourra donc maintenant compléter The Prodigy : « *I'll take your brain to an other Hausdorff's dimension* ».

Encore merci pour tous ces apports mathématiques !

Bibliographie

La planète \mathbb{R} - H. Boualem, R. Brouzet (2002)

The geometry of fractal set - K. J. Falconer (1985)

Universalité et Fractales - B. Sapoval (1997)

