

Puissances et fractales

(d'après la vidéo « Fract'hack Escape » de Jolies Maths)

Les fractales sont des objets mathématiques très élégants généralement obtenus par la répétition d'un procédé de construction. Regarde attentivement la vidéo puis répond aux questions.

Premier défi : le triangle de Sierpinski

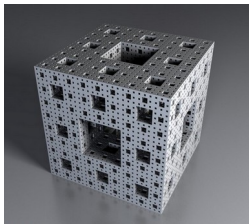
a) Décris le procédé de construction qui permet de passer d'une étape à la suivante.



b) Le Jardinier se trompe et perd une vie. Quelle a été son erreur ?

Deuxième défi : l'éponge de Menger

Au départ, elle est constituée d'un seul cube. À l'étape 1, elle en compte 20 puis à l'étape 2, elle en compte $20^2 = 400$ (ce qui est celle dans la vidéo).



Un professeur fait construire **une éponge de Menger de niveau 3**. Un cube en origami est construit à partir de **4 feuilles** carrées. En moyenne, assembler 1 cube en origami prend **3 minutes**.

a) Combien de cubes constituent l'éponge de Menger de **niveau 3** ?

b) Combien de feuilles faut-il pour la construire ?

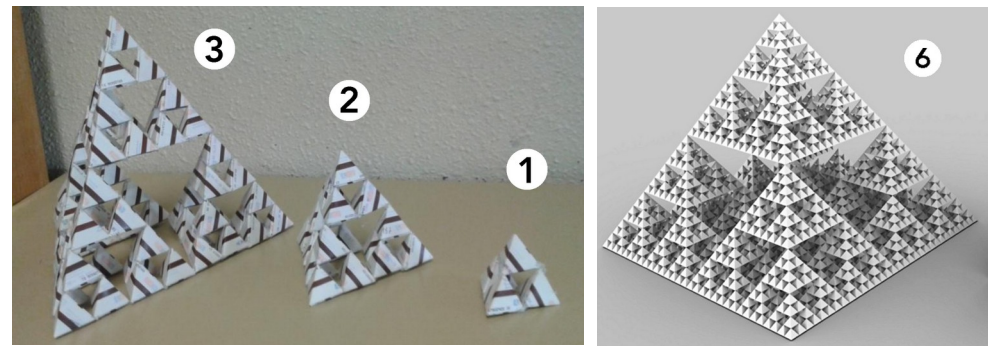
c) Quel temps cumulé (en heures) aura été nécessaire pour la construire (sans compter le collage des cubes entre eux) ?



Troisième défi : le tétraèdre (ou pyramide) de Sierpinski

Au départ, il y a 1 petit tétraèdre. À l'étape 1, il y en a 4. À l'étape 2, il y en a $4^2 = 16$. À l'étape 3, il y en a $4^3 = 64$. À l'étape 4, il y en a $4^4 = 256$, etc. Dans la vidéo, la fractale qui apparaît est un tétraèdre de Sierpinski de **niveau 5**.

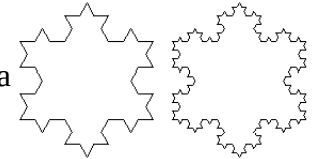
Un tétraèdre est constitué de **3 tickets** de métro et a besoin en moyenne de **30 secondes** pour être construit.



- a) Dans la vidéo, le Hacker utilise l'égalité $4^5 = 2^{10}$. D'où vient cette égalité ?
 b) Pour trouver $2^{10} = 1024$ sans utiliser de calculatrice (ou d'ordinateur), l'Araignée compte la suite des doubles 2, 4, 8, 16, 32, etc. À combien est égal 2^{12} (sans calculatrice) ?
 c) Dédurre de la question précédente le nombre de tétraèdres qui constitue une pyramide de Sierpinski de **niveau 6**.
 d) Combien de tickets de métro faut-il pour la construire ?
 e) Quel temps cumulé (en heures) sera nécessaire pour la réaliser ?

Défi final : le flocon de Koch (prononcé « korr »)

Le tableau suivant récapitule le nombre de côtés, la longueur d'un côté et le périmètre total de la figure.



- a) À quoi correspond la réponse « 256 » dans la vidéo ?
 b) Complète le tableau (dans « Nombre de côtés », faire apparaître à gauche le calcul avec une puissance et à droite le résultat sous forme décimale).
 c) À partir de quelle étape le périmètre du flocon dépasse-t-il 10 mètres ?

| | Nombre de côtés | | Longueur d'un côté | Périmètre (cm) |
|---------|-----------------|----|--------------------|----------------|
| Départ | 3 | 3 | 27 | 81 |
| Étape 1 | 3×4^1 | | 9 | |
| Étape 2 | | 48 | | |
| Étape 3 | 3×4^3 | | | |
| Étape 4 | | | 1/3 | 256 |
| Étape 5 | | | | |